

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 6. Enero-Junio 2022

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Propuesta de un Teorema y su demostración para el cálculo de la relación de los nombres de los días y las fechas correspondientes en $\mathbb{R}$.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Descripción algebraica del área y volumen del pequeño Rombicosidodecaedro.**
Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Modelado y construcción de una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski para captura electromagnética renovable.**
Marcos Fajardo Rendón.
- **Modelo matemático de predictibilidad para el incremento de ventas mediante una campaña de enahning de Central de Pisos y Alfombras S.A. de C.V.**
Areli Guadalupe Mateos Sánchez.
- **Fractal lineal cruz, modelos de probabilidad y cálculo diferencial para reestructuración impositiva.**
Fernando Gustavo Isa Massa.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

<i>Acevedo Silva Vitaliano +.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Caballero Mora Karen Salomé.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
<i>Guzmán Sánchez Sergio.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Hernández Escobar Marleny.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Isa Massa Fernando Gustavo.</i>	Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.
<i>Juárez Contreras Socorro.</i>	Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.
<i>Mendoza Pérez Armando Felipe.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Salazar Peña Enrique.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Sentiés Nacaspac María de Jesús.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Trejo Reséndiz Raciél.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 6, Enero-Junio 2022 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 07 de enero de 2022.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 6.

Enero-Junio de 2022

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 5, julio-diciembre de 2021, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Propuesta de un Teorema y su demostración para el cálculo de la relación de los nombres de los días y las fechas correspondientes en $\mathbb{R}$.	5
--	----------

Proposal of Theorem and proof for the calculation of names of the days relation and their corresponding dates in $\mathbb{R}$.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Descripción algebraica del área y volumen del pequeño Rombicosidodecaedro.	9
---	----------

Algebraic description area and volume of the small Rhombicosidodecahedron.

Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Modelado y construcción de una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski para captura electromagnética renovable.	20
--	-----------

Modeling and construction of a fractal antenna based on Sierpinski triangle for renewable electromagnetic capture.

Marcos Fajardo Rendón.

Modelo matemático de predictibilidad para el incremento de ventas mediante una campaña de enahning de Central de Pisos y Alfombras S.A. de C.V.	27
--	-----------

Mathematical model of predictability for sales increase using an enahning campaign for Central de Pisos y Alfombras S.A. de C.V.

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

Fractal lineal cruz, modelos de probabilidad y cálculo diferencial para reestructuración impositiva.	30
---	-----------

Linear cross fractal, probability models and differential calculus for tax restructuring.

Fernando Gustavo Isa Massa.

CARTA DEL EDITOR

2022 es año congruente con las fechas de 1960 entre otros. Ya Martin Gardner hacía especial a este año del siglo pasado:

Sea α el menor número primo y β el menor número perfecto. $(7\alpha)^2 + (7\beta)^2 = 1960 = 2\alpha^3 + (\alpha\beta)^3 + \beta^3$. (Gardner-Herrera). En este último trinomio, el cubo del producto de los números es 1728, es el mismo que aparece en la propuesta de Ramanujan descrita líneas abajo.

Este año 2022 recordamos brevemente a 3 autores e investigadores de la matemática cuyos trabajos han dejado huella profunda en el conocimiento moderno, aunque uno de ellos no haya sido apoyado por las autoridades como debía ser, pero su obra aunque prácticamente desconocida tiene gran valor, dada la época y el país.

El jueves 22 de diciembre de 1887 nace el gran matemático indio Srinivasa Ramanujan, cuya biografía es de sobra conocida, así como sus aportaciones al mundo matemático. Con una infancia propia de la India de fines del siglo XIX es recomendado por el matemático británico G. Hardy para que realice estudios en Inglaterra, sorprendiendo a propios y extraños con su gran talento, enfocado a la Teoría de Números. Un solo ejemplo basta de su gran potencia intelectual: 1729 es el número más pequeño que es posible expresarlo como la suma de dos números elevados al cubo, y con dos pares de números distintos $1^3 + 12^3 = 1729 = 9^3 + 10^3$.

En 1904 se publica en Cambridge, Inglaterra el primer tomo (de 4) de los escritos matemáticos completos de James Joseph Sylvester cuya influencia en los matemáticos de su época fue definitiva. Contiene 68 artículos y un apéndice en el que el editor de la obra incluye notas sobre su Teorema sobre las determinantes, obra fundamental para el posterior desarrollo del álgebra lineal. Dejó una marcada influencia de su obra en Estados Unidos permitiendo que este país se desarrollase más profundamente en el conocimiento matemático.

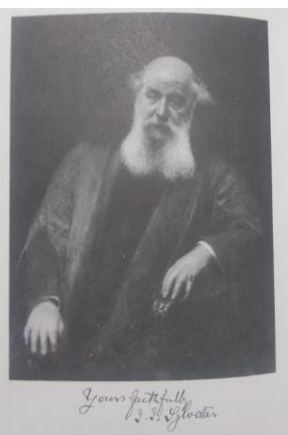
En julio de 1960 y con recursos propios Romero Choucheury publica en la Ciudad de México su obra titulada Elementos de Lógica Simbólica y Filosofía. La primera y única edición constó de 500 ejemplares. Aunque ya se habían publicado algunas obras de esta naturaleza, el contenido propuesto y sugerido por los revisores de la entonces Secretaría de Educación Pública a cargo de Jaime Torres Bodet, y a quienes la primera versión les pareció muy difícil y de nivel elevado, en una segunda versión incluye temas importantes y escasamente estudiados en México: El cálculo Funcional; Cálculo Proposicional; Teoría de Conjuntos; Conjuntos ordenables; Álgebra de Conjuntos, Números Cardinales Transfinitos; Números ordinales Transfinitos; Teoría de Funciones, entre otros temas de esta maravillosa obra. Expone los contenidos con el uso de simbología que posteriormente fue introduciéndose en nuestro país, pero sin descuidar el aspecto didáctico en la explicación de los temas. El oficio de aceptación de la obra lo firmó el Profr. Celerino Cano el viernes 18 de septiembre de 1959, aprobando su publicación. Meses después, el Departamento de Divulgación de esta dependencia finalmente emitió un oficio en el que extendía al autor la negativa para su publicación con el argumento de no existir presupuesto para ello.

Consideramos que fue una errónea decisión en la administración de Torres Bodet, pues no dio la oportunidad a las personas interesadas y a los estudiantes de Instituciones educativas de nivel superior como Escuela Normal Superior de México, la Facultad de Ciencias de la UNAM y escuelas de ingeniería del IPN de contar con un maravilloso material de apoyo en el estudio de una de las ramas más importantes de la matemática.

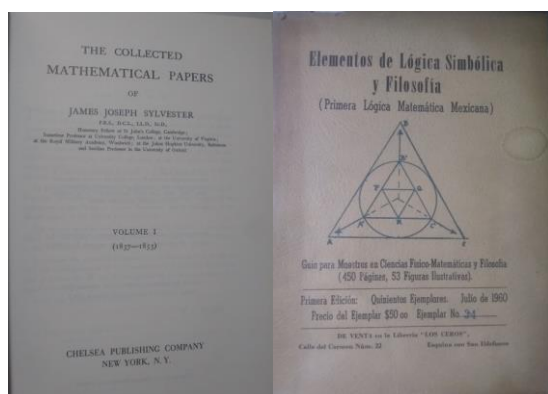
En éste número se realizan cinco propuestas originales: En objetos matemáticos se presenta un algoritmo para el cálculo de la relación entre los nombres de los días y las fechas correspondientes; además se incluye una descripción desde el punto de vista del álgebra de tanto el área como volumen del pequeño Rombicosidodecaedro. Para objetivos matemáticos el número 6 del JOOM describe un cosechador de energía eléctrica basado en el triángulo de Sierpinski; así mismo aparece un modelo matemático que hace la predictibilidad en marketing para una empresa y una propuesta que describe la relación existente entre los impuestos internacionales con los fractales, modelos de probabilidad y cálculo diferencial.



Srinivasa Ramanujan



James Joseph Sylvester



Portada de la obra de J.J. Sylvester Portada de la obra de R. Chocheury

Los editores.

Propuesta de un Teorema y su demostración para el cálculo de la relación de los nombres de los días y las fechas correspondientes en $\mathbb{R}$.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- En el presente artículo propongo un Teorema y su demostración para la estimación del nombre de los días y su relación con las fechas en el calendario salamanitano, conocido comúnmente como cálculo de fechas. El procedimiento se basa únicamente en el uso del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, lo que simplifica mucho su operación, sin embargo el posible inconveniente es la necesidad de conocer los fundamentos del calendario, como el número de días de cada mes y la estimación de años bisiestos, lo que puede dificultar la operación, pues es necesaria una interacción entre el procedimiento y el usuario. *Dedico el presente trabajo a la memoria de Estela Armendia Quiroz, con profundo agradecimiento e infinito cariño.*

Palabras Clave- calendarios, cronología, cuenta del tiempo, cálculo de fechas.

Zusammenfassung- In diesem Artikel schlage ich ein Theorem und seinen Beweis für die Schätzung des Namens der Tage und ihrer Beziehung zu den Daten im salamanischen Kalender vor, allgemein bekannt als Datumsberechnung. Das Verfahren basiert ausschließlich auf der Verwendung des Satzes ganzer Zahlen $\mathbb{Z}$, was seine Funktionsweise stark vereinfacht, jedoch besteht der mögliche Nachteil darin, dass die Grundlagen des Kalenders wie die Anzahl der Tage in jedem Monat und die Schätzung des Sprungs bekannt sein müssen Jahren, was die Bedienung erschweren kann, da eine Interaktion zwischen dem Verfahren und dem Benutzer notwendig ist. *Ich widme dieses Werk dem Andenken an Estela Armendia Quiroz, mit tiefer Dankbarkeit und unendlicher Zuneigung.*

Schlüsselwörter-- kalender, chronologie, zeitzählung, datumsberechnung.

Резюме- В этой статье я предлагаю Теорему и ее доказательство для оценки названий дней и их связи с датами в саламанкском календаре, обычно известной как вычисление даты. Процедура основана исключительно на использовании набора целых чисел $\mathbb{Z}$, что значительно упрощает ее работу, однако возможным недостатком является необходимость знания основ календаря, таких как количество дней в каждом месяце и оценка високосного лет, что может затруднить операцию, поскольку необходимо взаимодействие между процедурой и пользователем. Я посвящаю эту работу памяти Эстелы Армении Кироз с глубокой благодарностью и бесконечной любовью.

Ключевые слова - календари, хронология, отсчет времени, исчисление даты.

Mathematical Subject Classification: 68Q25, 68M20, 68Uxx, 68Q42

I. DEFINICIONES

- 1) D : Nombre de los días semanales, módulo 7
(l, m, M, j, v, s, d)
- 2) D_n : l, m, M, j, v, s, d
- 3) m : Sean los meses del año módulo 12
($e, f, r, a, m, j, J, a, s, o, n, d$)
- 4) m_n : $e, f, r, a, y, n, J, a, p, o, n, d$
- 5) Si la diferencia entre dos enteros a, b es divisible por m son congruentes, módulo m : $a \equiv b \pmod{m}$ ^[1].
- 6) Sean: $m_0 \equiv 0 \pmod{7}$
 $m_1 \equiv 1 \pmod{7}$
 $(a, n, p, n) \in m_2 \equiv 2 \pmod{7}$
 $(e, r, y, J, a, o, d) \in m_3 \equiv 3 \pmod{7}$
- 7) Año Trópico es el tiempo transcurrido entre 2 pasos consecutivos del Sol por el punto Aries ^[2].
- 8) El Año Trópico contiene 52 semanas, con 7 días cada una: $A_T = (52)(7) + 1$ ^[3].
- 9) El año bisiesto contiene 52 semanas, con 7 días cada una, además de un día extra adicionado al mes de febrero de cada cuatro años (estos años son aquellos cuyo segundo par de dígitos es divisible por 4, y exceptuando aquellos cuyo primer par de dígitos no es divisible por 4 y sean de año de principio de siglo, de acuerdo con la regla propuesta para el calendario actual). Así, $A_{TB} = (52)(7) + 2$ ^[3].

10) Un conjunto $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ es un sistema de residuo completo módulo m , con las propiedades siguientes:

- i) $\alpha \neq x \rightarrow a_\alpha \not\equiv a_x \pmod{m}$
- ii) $a \in \mathbb{Z} \rightarrow \exists$ un índice $i \mid 1 \leq i \leq m$, con $a \equiv a_\alpha \pmod{m}$ [4: 41].

11) σ Conjunto de días del calendario Salamantino [3] ordenados secuencialmente de acuerdo con sus reglas convenidas, a partir del viernes 15 de octubre de 1582.

12) σ_π Conjunto de días del calendario previo al calendario Salamantino ordenados secuencialmente de acuerdo con sus reglas convenidas, a partir del año 325.

13) $\sim$ Asociación [5].

14) ■ Símbolo de Halmos que indica el final de una prueba [6].

II. AXIOMAS.

1) Dada la ecuación: $ax + bx = k$. Una condición suficiente y necesaria para obtener una solución $x, y \in \mathbb{Z}$, es que a, b sean divisores de k . Si hay una solución, entonces existen muchas más soluciones. Si $d = (a, b)$ entonces hay exactamente solución de la forma:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}z, y = y_0 - \frac{a}{d}z$$

Con z como entero arbitrario; x_0, y_0 cualquier solución [4: 23].

2) Si $a_1, a_2, \dots, a_m$ es un sistema de residuo completo $\pmod{m}$, $i(k, m) = 1$, entonces $ka_1, ka_2, \dots, ka_m$ también es un sistema de residuo completo, $SRC \pmod{m}$.

Prueba:

- a) $ka_i \equiv ka_j \pmod{m} \rightarrow a_i \equiv a_j \pmod{m} \mid i = j$ (por Def. 9).
- b) Por Axioma 1, si $(k, m) = 1$, la congruencia $kx \equiv a \pmod{m}$ tiene una solución para toda a ya definida. Sea entonces una solución x_0 . Debido a que $a_1, \dots, a_m$ es un sistema de residuo completo, entonces existe un índice i tal que $x_0 \equiv a_i \pmod{m}$. De lo anterior se tiene que $kx_0 \equiv ka_i \equiv a \pmod{m}$ [4:41]. ■

III. TEOREMA 1.

Cualquier elemento de la secuencia σ, σ_π se asocia con algún elemento de la secuencia D_n . Esta asociación es el residuo $\pmod{7}$ de la sumatoria del sistema completo de residuos m_0, m_1, m_2, m_3 con A_t y A_{TB} :

$$\begin{aligned} \sigma, \sigma_\pi \sim D_n &= [D_B - D_A \pmod{7}] \\ &+ \sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7} \\ &+ [A_B - A_A \pmod{7}] + [A_{TB} \pmod{7}] \end{aligned}$$

Donde D_A es el día actual, D_B es el día buscado. A_B , el año buscado y A_A el año actual; A_{TB} el número de años bisiestos.

Prueba:

Por Def. 11, una fecha del calendario Salamantino σ se representa por un número D que representa el día (Def. 1); un número m que representa el mes (Def. 3) y un número que representa el año (Def. 7 y Def. 8). $(D_B - D_A)$ es la diferencia en días de la secuencia de días en σ (Def. 11), además si $D_n \in \mathbb{Z}^+$ indica adelantarse secuencialmente el nombre de día según su valor absoluto, si $D_n \in \mathbb{Z}^-$ indica atrasarse secuencialmente el nombre de día según su valor absoluto, (Def. 5).

La sumatoria $\pmod{7}$ representa los días de los meses (buscado y actual) que son la diferencia de los meses buscado y actual, por Def. 5. Además $m_{0,1,2,3} \in \mathbb{Z}$. Si $m_{0,1,2,3} \in \mathbb{Z}^+$, indica el adelanto del nombre del mes en la secuencia del calendario salamantino σ por Def. 3 y 4. Si $m_{0,1,2,3} \in \mathbb{Z}^-$, indica retraso del nombre del mes en la secuencia del calendario salamantino σ por Def. 3, 4 y 5.

Existe diferencia en el nombre de los días entre el año – mes buscado y el año – mes actual, por Def. 8. Todo número $A_n \in \mathbb{Z}$. Cuando $A_n \in \mathbb{Z}^+$ implica adelantarse en la secuencia de nombres de días de la semana Def. 1, 2 y 5. Si $A_n \in \mathbb{Z}^-$, implica retrasarse en la secuencia de nombres de los días de la semana Def. 1 y 2.

El número de días bisiestos (Def. 9) es el lapso entre el periodo de tiempo A_B, A_A donde $A_n \in \mathbb{Z}$. Si $A_n \in \mathbb{Z}^+$ condiciona adelantarse en la secuencia de nombres de los días de la semana Def. 1 y 2. Cuando $A_n \in \mathbb{Z}^-$ implica retroceder en la secuencia de nombres de los días de la semana Def. 1 y 2.

El resultado es un número $\sigma, \sigma_\pi \sim D \in \mathbb{Z}$ e indica el nombre del día buscado por Def. 5 y 10; axiomas 1 y 2. ■.

IV. COROLARIO 1.

a) Determinar el nombre del día de la fecha 15 de enero de 1960. Por Teorema 1 y teniendo la fecha del 15 de julio de 2022 para este corolario (en lugar de esta se debe escribir los datos de la fecha en que se realiza el cálculo).

$$\begin{aligned} \sigma \sim D_n &= [D_B - D_A \pmod{7}] + \sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7} \\ &+ [A_B - A_A \pmod{7}] + [A_{TB} \pmod{7}] \\ \sigma \sim D_n &= (15 - 15) + (-30 - 31 - 30 - 31 - 28 - 31) \\ &+ (1960 - 2022) + (-5 - 5 - 5 - 1) \\ \sigma, \sigma_\pi \sim D_n &= 0 - 181 - 62 - 16 = 259 \end{aligned}$$

Se divide 259 por 7, y se toma en cuenta el residuo: el cociente es 37 y el residuo 0. Por lo tanto, a partir del viernes 15 de julio de 2022 recorro 0 nombres de días. Fue viernes 15 de enero de 1960.

Nota 1) Obsérvese que para el caso de $\sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7}$, se escribe el total del número de días de cada mes. Así, escribí los valores negativos por representar retroceso entre el mes de julio y el mes de enero. -30 corresponde al periodo junio - julio; -31 al periodo mayo - junio; -30 al periodo abril - mayo; corresponde -31 al periodo marzo - abril; -28 corresponde al periodo febrero - marzo; -31 al periodo enero - febrero.

Los números del último paréntesis $(-5 - 5 - 5 - 1)$ indican los días extra de los años bisiestos. Así, cada 20 años hay 5 años bisiestos (o cinco días extra). Como el periodo de tiempo entre 2022 y 1960 contiene tres periodos de 20 años (2022-2002; 2002-1982 y 1982-1962) se escribe el dígito con el número 5 negativo por indicar retroceso en el lapso de tiempo; hay un año bisiesto más, el correspondiente a 1960, ya que la fecha solicitada es en el mes de enero, por ello se agrega el número uno negativo.

b) Determinar el nombre del día de la fecha 9 de julio de 1972, tomando como fecha de partida el miércoles 3 de agosto de 2022.

Por Teorema 1:

$$\begin{aligned}\sigma \sim D_n &= [D_B - D_A \pmod{7}] + \sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7} \\ &\quad + [A_B - A_A \pmod{7}] + [A_{TB} \pmod{7}] \\ \sigma \sim D_n &= (9 - 3) + (-31) + (2022 - 1972) \\ &\quad + (-5 - 5 - 2) \\ \sigma, \sigma_{\pi} \sim D_n &= 6 - 31 - 50 - 12 = -87\end{aligned}$$

Se divide -87 por 7. El cociente es -12 y el residuo 3. Significa que debo retroceder secuencialmente tres nombres de día a partir del miércoles. Por lo tanto fue domingo 9 de julio de 1972.

c) Determinar el nombre del día de la fecha 23 de agosto de 1974, tomando como fecha de inicio de cálculo el domingo 27 de febrero de 2022.

Por Teorema 1:

$$\begin{aligned}\sigma \sim D_n &= [D_B - D_A \pmod{7}] + \sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7} \\ &\quad + [A_B - A_A \pmod{7}] + [A_{TB} \pmod{7}] \\ \sigma \sim D_n &= (23 - 27) \\ &\quad + (28 + 31 + 30 + 31 + 30 \\ &\quad + 31) + (1974 - 2022) \\ &\quad + (-5 - 5 - 2) \\ \sigma \sim D_n &= -4 + 181 - 48 - 12 \\ \sigma \sim D_n &= -4 + 6 - 6 - 5 = -9\end{aligned}$$

-9 se divide por 7. El cociente es -1 y el residuo es 2. Significa que debo retroceder dos nombres de día a partir del domingo. La fecha es viernes 23 de agosto de 1974.

Nota 2. Otra manera de realizar el cálculo es dividir cada sumando entre 7, y tomar en cuenta solamente el residuo. Así, -4 dividido por 7 obtenemos cero como cociente y 4 como residuo; 181 dividido por siete el cociente es 25 y el residuo es 6; -48 dividido por 7, el cociente es -6 y el residuo 6; 12 dividido por 7, el cociente es 1 y el residuo es 5. Todos los residuos conservan el signo del dividendo, pues indican el avanzar o retroceder el nombre secuencial de los días de la semana.

Con el proceso anterior indicado en los incisos a) y b) tenemos:

$$\sigma \sim D_n = -4 + 181 - 48 - 12 = +117$$

Se divide 117 por 7. El cociente es 16 y el residuo es 5. Al tener signo positivo el residuo lo conserva, de tal manera que debo adelantar cinco nombres de día a partir del domingo. La fecha buscada es viernes 23 de agosto de 1974.

d) Determinar el nombre del día de nacimiento de Srinivasa Ramanujan, establecido el 22 de diciembre de 1887. Supongamos que iniciamos el conteo el martes 14 de enero de 2042.

Por Teorema 1):

$$\begin{aligned}\sigma \sim D_n &= [D_B - D_A \pmod{7}] \\ &\quad + \sum_{SRC} m_0, m_1, m_2, m_3 \pmod{7} \\ &\quad + [A_B - A_A \pmod{7}] \\ &\quad + [A_{TB} \pmod{7}] \\ \sigma \sim D_n &= (22 - 14) + (31 + 30) + (1887 - 2042) \\ &\quad + (-25 - 5 - 5 - 3) \\ \sigma \sim D_n &= 8 + 61 - 155 - 38 = -124\end{aligned}$$

Se divide -124 por 7. El cociente es -17 y el residuo es 5 que conserva el signo negativo. Significa que debo retroceder cinco nombres de día a partir del martes. El día de la fecha es jueves 22 de diciembre de 1887.

Nota 2. Obsérvese que en el segundo paréntesis correspondiente solo escribí 31 días correspondientes al mes de octubre, y 30 días correspondientes al mes de noviembre. En los años no bisiestos las fechas de los meses de enero y octubre; febrero, marzo y noviembre; abril y julio; septiembre y diciembre son las mismas, debido a que si sumamos los días de cada mes en esos lapsos de tiempo, el residuo siempre es cero. Por ello, se puede utilizar esta relación para acortar el procedimiento.

En los años bisiestos esta relación se observa en los meses de enero y julio; febrero y agosto; abril y julio; septiembre y diciembre. En el último paréntesis anoté el número 25 (negativo por indicar que hay retroceso en la cuenta del tiempo).

Un siglo (lapso de 100 años) contiene 25 años bisiestos, ya que al dividir 100 por 4 (lapso de tiempo entre dos años bisiestos) el cociente es 25 y el residuo es cero. Este dato abrevia nuevamente el cálculo.

Sin embargo, la regla establecida por el equipo de la Universidad de Salamanca [3] aclara que todos los siglos cuyas dos primeras cifras son divididas por 4 y con residuo cero, son bisiestos. De lo contrario no lo son. (Así, 1600 y 2000 fueron años bisiestos; 1700, 1800 y 1900 no lo fueron). Es decir, un ciclo del calendario actual comprende 400 años, de los cuales se omiten 3 años bisiestos. Los dos siguientes números 5 corresponden a dos periodos de 20 años cada uno (como

mencioné en la nota 1), Finalmente debo incluir los años bisiestos anteriores a 1902: 1900 no lo fue (por lo ya explicado); 1896, 1892 y 1888, es decir un total de 3 años bisiestos más.

Consecuencia 1. El cálculo de la relación entre los nombres de los días y las fechas establece grupos de lapsos de tiempo invariantes, que agilizan el proceso descrito.

Definición 15. Sea A_B un año bisiesto cualquiera; A_{B+1} el año siguiente al bisiesto; A_{B+2} representa dos años siguientes al año bisiesto (o un año no divisible por 4); A_{B+3} un año anterior a un año bisiesto cualquiera.

Definición 16. Invariantes en lapsos de tiempo que indican años con el mismo nombre de día y la misma fecha; para años bisiestos a partir del 1 de marzo, y todos los años no bisiestos.

$$\begin{aligned} A_B &: \{6, 11, 6, 5\} \\ A_{B+1} &: \{6, 5, 6, 11\} \\ A_{B+2} &: \{11, 6, 5, 6\} \\ A_{B+3} &: \{5, 6, 11, 6\} \end{aligned}$$

Nota 3. La relación anterior permite agilizar los cálculos.

Si el año de inicio de el cálculo es un año bisiesto a partir del 1 de marzo, la relación entre nombre del día y su fecha será la misma a los 6 años; a los 11 después de estos 6 (es decir a los 17 años); a los 5 años después de estos 17 (es decir a los 23 años y a los 6 después de ello, es decir a los 28 años, completando un mini-ciclo calendárico pues 28 es divisible por 4 y por 7.

Así, si tenemos el año 1728 (bisiesto), a partir del 1 de marzo la relación de fechas con el nombre de los días será la misma para 1734; 1745; 1751; 1756. Sucede lo mismo con los otros grupos de invariantes.

Definición 17. Invariantes en lapsos de tiempo que indican años con el mismo nombre de día y la misma fecha; para los meses de enero y febrero de años bisiestos.

$$\begin{aligned} A_B &: \{5, 6, 11, 6\} \\ A_{B+1} &: \{6, 11, 6, 5\} \\ A_{B+2} &: \{6, 5, 6, 11\} \\ A_{B+3} &: \{11, 6, 5, 6\} \end{aligned}$$

Nota 4. Con la misma idea de la nota 3, y solo para los meses de enero y febrero de años bisiestos, el 15 de enero de 1960 fue viernes. En 1965, 1971, 1982 y 1988 también es viernes para el 15 de enero.

V. IMPLICACIONES. UNA INTERPRETACIÓN.

Una interpretación de la relación estudiada anteriormente describe la posición más exacta posible de la Tierra en su órbita elíptica alrededor del Sol. La relación entre el nombre de un día y su fecha permite localizar con mucha aproximación la posición señalada. Por ejemplo, el miércoles 6 de julio de 2022, la Tierra se localizó aproximadamente en el punto llamado afelio (lugar de la órbita más alejado del Sol). Para el siguiente año, será jueves 6 de julio, es decir la posición de la Tierra está aproximadamente un grado y fracción delante de ese punto; para el 2023 estará casi 3 grados delante de esa posición; para

el 2024, estará 5 grados delante o también 2 grados antes de esa posición; y de acuerdo con los grupos de invariantes hasta el año 2033 volverá la Tierra a estar en una posición muy cercana a la de este 2022. Esta es una forma de interpretar la relación dicha, es decir, se puede entender como la conservación de la misma posición relativa de la Tierra con respecto al Sol en su órbita elíptica. Sin embargo, al involucrar el uso de las calculadoras y de la duración aproximadamente exacta del año trópico (365.24219879), tenemos la siguiente observación:

En un ciclo del calendario salamantino de 400 años el nombre del día y la fecha son los mismos.

Por ejemplo, el 3 de agosto de 2022 es miércoles. También lo fue en 1622 de acuerdo con las reglas matemáticas de este calendario utilizado en la actualidad. Si usamos la calculadora científica y realizamos el cálculo anterior utilizando la fracción del año y no los años bisiestos obtenemos: 6.879516.

Es decir que debo retroceder en el tiempo casi siete días, o sea 6 días 21 horas 6 minutos 30.1824 segundos. Esta imprecisión debida a los convenios humanos deja abierta la posibilidad de conjeturar una sola consecuencia de un hipotético viaje a través del tiempo.

Una posible consecuencia es que no llegaría al destino a la hora exacta sino con 2 horas y 54 y medio minutos de adelanto en el tiempo.

Otra consecuencia es el espacio. Si el diámetro de la Tierra de aproximadamente 12, 756 Km., corresponde a 1 día y fracción de la órbita terrestre alrededor del Sol, entonces llegaría aproximadamente a 1,545.5368 kilómetros de distancia del lugar proyectado, seguramente al oeste del lugar.

Desde luego son sólo conjeturas que pueden hacer reflexionar sobre este tópico.

REFERENCIAS

- [1] Dickson, L. E. (1992). Theory of Numbers. Vol. 1 (p. VII). Chelsea Publishing Company. N. Y.
- [2] Russell, H. N. Cosmografía. U.T.E.H.A. Madrid.
- [3] Carabias, A. M. Salamanca y la medida del Tiempo. Ediciones Universidad de Salamanca. 2012.
- [4] Le Veque, W. Elementary Theory of Numbers. Dover Edition. N. Y. (P. 9) 1990.
- [5] Birkhoff, G. & Mac Lane, S. A survey of Modern Algebra (Pág. 427). McMillan Company. N. Y.
- [6] O'Neill, B. Elementary Differential Geometry. Academic Press N. Y. (1966). p. 9.

Descripción algebraica del área y volumen del pequeño Rombicosidodecaedro.

Jaime William Flores Tecalco

Alumno de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior de México (ENSM), Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Alumno de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México
william10_511@hotmail.com

Resumen- En este artículo es trabajada la descripción algebraica del pequeño Rombicosidodecaedro referente a su volumen y área en función de su arista basal, por tal motivo se analizan conceptos y elementos como su circunradio, ángulo diedro, etc.

Palabras Clave- Arquimediano, Rombicosidodecaedro, polígono, pirámide, ángulo diedro, poliedro, Tchebycheff, volumen, área.

Abstract- This article works on the algebraic description of the small rhombicosidodecahedron referring to its volume and area from its basal edge, for this reason concepts and elements are analyzed as its circumradius, dihedral angle, etc.

Keywords- Archimedean, rhombicosidodecahedron, polygon, pyramid, dihedral angle, polyhedron, Tchebycheff, volume, area.

Mathematical Subject Classification: 70G55, 14-01.

I. INTRODUCCIÓN

El pequeño Rombicosidodecaedro (Figura 1) es un sólido Arquimediano el cual posee 62 caras, estas caras son 20 triángulos equiláteros, 30 cuadrados y 12 pentágonos regulares, 60 vértices y 120 aristas [1]. Además, tiene propiedades únicas, por ejemplo, ocupa aproximadamente el 93% del espacio de una esfera circunscrita [2]. También lo han mencionado en algunos programas de televisión como lo es The Big Bang Theory (temporada 8, capítulo 2) [3] donde es la respuesta a un acertijo intelectual por su grado de complejidad.

En este artículo se describe la obtención de relaciones matemáticas para el volumen y el área de este Arquimediano en función del tamaño de su arista basal α ; por tal motivo, se hace uso de su circunradio R .



Figura 1.- Pequeño Rombicosidodecaedro

Se comenzará a trabajar el área y volumen del pequeño Rombicosidodecaedro analizando conceptos y deducciones de fórmulas de ángulos diedros, fórmulas trigonométricas, relaciones geométricas y demás tópicos a fines.

II. ÁNGULO DIEDRO

La obtención de la ecuación de un ángulo interior diedro α_n [1] de una pirámide regular es un proceso geométrico; se trabajará en una pirámide regular hexagonal para una mayor claridad visual a la hora de realizar las descripciones.

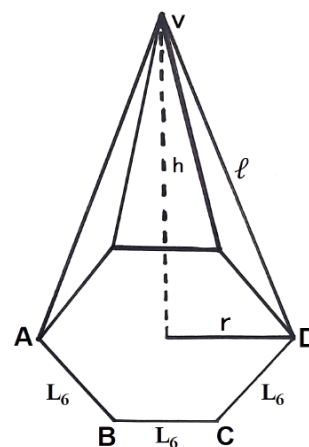


Figura 2. -Pirámide regular hexagonal.

En la Figura 2, se define h como la altura piramidal; r el radio de la base; l como la arista lateral; L_6 la longitud de los lados de la base; y A, B, C, D como vértices de la base.

Estratégicamente, se toma un punto E (Figura 3) en la arista lateral l del vértice B, talque que se cumpla que:

$$\overline{AE} \perp \overline{EV} \wedge \overline{EC} \perp \overline{EV} \quad (1)$$

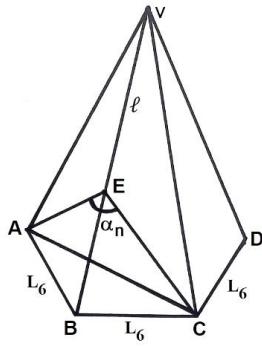


Figura 3. -Pirámide regular hexagonal y su contenido.

Al emplear el Teorema del Coseno [4] [5] en el $\triangle AEC$ (Figura 4) tenemos la expresión:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2 \overline{AE} \overline{EC} \cos \alpha_n \quad (2)$$

El $\triangle AEC$ es un triángulo isósceles [6] lo que implica que:

$$\overline{AE} = \overline{EC} \quad (3)$$

Al sustituir (3) en (2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AE}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \overline{AE} \overline{AE} \cos \alpha_n \\ \overline{AC}^2 &= 2\overline{AE}^2 - 2\overline{AE}^2 \cos \alpha_n \\ \overline{AC}^2 - 2\overline{AE}^2 &= -2\overline{AE}^2 \cos \alpha_n \\ \cos \alpha_n &= \frac{\overline{AC}^2 - 2\overline{AE}^2}{-2\overline{AE}^2} \\ \cos \alpha_n &= 1 - \frac{\overline{AC}^2}{2\overline{AE}^2} = 1 - \frac{\overline{AC}^2}{2\overline{EC}^2} \end{aligned} \quad (4)$$

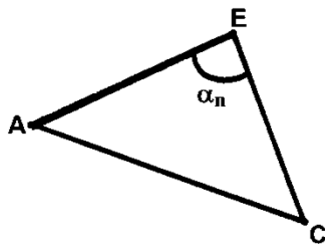


Figura 4. – Triángulo AEC.

Se define el ángulo interno φ [7] del $\triangle ABC$ (Figura 5) como:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{n-2}{n} (180^\circ) = \frac{n-2}{n} \pi \\ \varphi &= \frac{\pi n - 2\pi}{n} \\ \varphi &= \pi - \frac{2\pi}{n} \end{aligned} \quad (5)$$

Se observa en el $\triangle ABC$ la necesidad de obtener la mitad del ángulo interno φ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi &= \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) \\ \frac{1}{2} \varphi &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \end{aligned} \quad (6)$$

Se ocupa la razón trigonométrica de $\sin \varphi$ [8], en el $\triangle BFC$, (Figura 6) y si se sabe que $\overline{AF} = \overline{FC}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varphi &= \frac{\frac{1}{2} \overline{AC}}{L_6} \\ \frac{1}{2} \overline{AC} &= L_6 \sin \frac{1}{2} \varphi \\ \overline{AC} &= 2L_6 \sin \frac{1}{2} \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Se sustituye (6) en (7):

$$\overline{AC} = 2L_6 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \quad (8)$$

Al utilizar la identidad trigonométrica $\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ [8] se tiene que:

$$\overline{AC} = 2L_6 \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \quad (9)$$

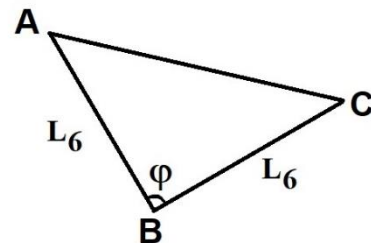


Figura 5. – Triángulo ABC.

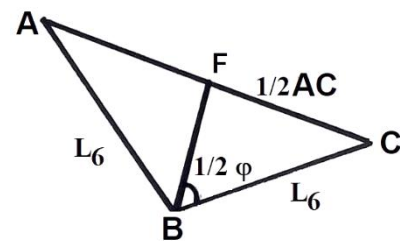


Figura 6. – Triángulo BFC.

Se halla $\overline{EC}$ al utilizar el Teorema de Pitágoras [9] [10] en el $\triangle VEC$ (Figura 7) y en el $\triangle CEB$ (Figura 8):

Caso $\triangle VEC$:

$$\ell^2 = \overline{EC}^2 + (\ell - \overline{EB})^2$$

$$\overline{EC}^2 = \ell^2 - (\ell - \overline{EB})^2 \quad (10)$$

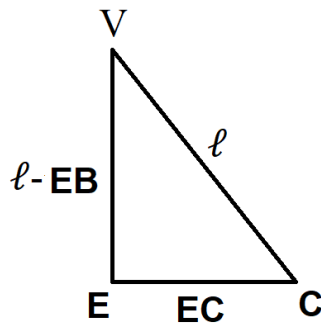


Figura 7. -Triángulo VEC.

Caso $\triangle CEB$:

$$L_6^2 = \overline{EB}^2 + \overline{EC}^2$$

$$\overline{EC}^2 = L_6^2 - \overline{EB}^2 \quad (11)$$

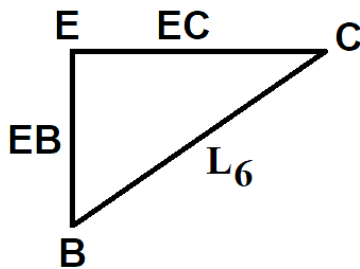


Figura 8. -Triángulo CEB.

Se igualan las ecuaciones (10) y (11) y se encuentra el valor de $\overline{EB}$:

$$L_6^2 - \overline{EB}^2 = \ell^2 - (\ell - \overline{EB})^2$$

$$L_6^2 - \overline{EB}^2 = \ell^2 - \ell^2 + 2\ell\overline{EB} - \overline{EB}^2$$

$$L_6^2 = 2\ell\overline{EB}$$

$$\overline{EB} = \frac{L_6^2}{2\ell} \quad (12)$$

Se sustituye (12) en (11) y se encuentra el valor de $\overline{EC}^2$:

$$\overline{EC}^2 = L_6^2 - \overline{EB}^2$$

$$\overline{EC}^2 = L_6^2 - \left(\frac{L_6^2}{2\ell}\right)^2$$

$$\overline{EC}^2 = L_6^2 - \frac{L_6^4}{4\ell^2}$$

$$\overline{EC}^2 = \frac{L_6^2(4\ell^2 - L_6^2)}{4\ell^2} \quad (13)$$

Finalmente, se sustituye (9) y (13) en (4) y se encuentra la ecuación de un ángulo interior diedro α_n de una pirámide regular:

$$\cos \alpha_n = 1 - \frac{\overline{AC}^2}{2\overline{EC}^2}$$

$$\cos \alpha_n = 1 - \frac{\left(2L_6 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}{2\left(\frac{L_6^2(4\ell^2 - L_6^2)}{4\ell^2}\right)}$$

$$\cos \alpha_n = 1 - \frac{4L_6^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{L_6^2(4\ell^2 - L_6^2)}{2\ell^2}}$$

$$\cos \alpha_n = 1 - \frac{8\ell \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4\ell^2 - L_6^2}$$

$$\cos \alpha_n = 1 + \frac{8\ell^2}{L_6^2 - 4\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (14)$$

La ecuación (14) se utiliza para encontrar el tamaño del ángulo diedro α_n de pirámides de caras regulares por ejemplo la pirámide cuadrada o la pirámide pentagonal [6].

Entonces, si las caras de las pirámides son polígonos regulares tenemos las relaciones:

$$\ell = L_6 \quad (15)$$

$$n \geq 3 \quad (16)$$

Donde n representa el número de caras laterales de la pirámide.

La ecuación (14) queda de la siguiente manera:

$$\cos \alpha_n = 1 + \frac{8\ell^2}{L_6^2 - 4\ell^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos \alpha_n = 1 + \frac{8L_6^2}{L_6^2 - 4L_6^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos \alpha_n = 1 + \frac{8L_6^2}{-3L_6^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos \alpha_n = 1 - \frac{8}{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right); n \geq 3 \quad (17)$$

Con (17) se calcula fácilmente el valor del tamaño del ángulo diedro α_n de una pirámide regular, por ejemplo, el ángulo α_n de la pirámide triangular:

Caso n=3:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= 1 - \frac{8}{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \\ \cos \alpha_3 &= 1 - \frac{8}{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) \\ \cos \alpha_3 &= 1 - \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ \cos \alpha_3 &= \frac{1}{3} \\ \alpha_3 &= \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \\ \alpha_3 &= 70.528779 = 70^\circ 31' 39''\end{aligned}\quad (18)$$

III. POLIEDROS REGULARES

Se analizarán únicamente los poliedros convexos que pertenecen a la familia de sólidos de Platón [11]. Gracias a sus propiedades, existe una esfera circunscrita [12] para cada uno de ellos, esto implica que los podemos descomponer en tantas pirámides regulares como caras posean los poliedros, coincidiendo sus vértices V con el circuncentro de la esfera; por lo tanto, el circunradio R del poliedro coincide con la arista lateral ℓ de dichas pirámides [6].

Gracias a esta implicación se deduce que el circunradio R es directamente proporcional a la arista basal L [9]. Por lo cual se genera una constante de proporcionalidad K.

$$R = KL; K > 0 \quad (19)$$

Generando dos casos:

Caso 1: L=1

$$R = K \quad (20)$$

Caso 2: K=1

$$L = \frac{1}{K} \quad (21)$$

Usando (20) y (21) en (14) el tamaño del ángulo diedro α_n queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= 1 + \frac{8\ell^2}{L^2 - 4\ell^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \\ \cos \alpha_n &= 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right); n \geq 3\end{aligned}\quad (22)$$

Donde n sigue siendo el número lados de la cara lateral.

Un ejemplo al utilizar (22) es la obtención del coseno del ángulo interior α_n de una pirámide triangular en un poliedro convexo.

Si n=3, entonces:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \\ \cos \alpha_3 &= 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} \right) \\ \cos \alpha_3 &= 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ \cos \alpha_3 &= 1 + \frac{8K^2}{4(1 - 4K^2)} \\ \cos \alpha_3 &= 1 + \frac{2K^2}{1 - 4K^2} \\ \cos \alpha_3 &= \frac{(1 - 4K^2) + 2K^2}{1 - 4K^2} \\ \cos \alpha_3 &= \frac{1 - 2K^2}{1 - 4K^2}\end{aligned}\quad (23)$$

Gracias al matemático Ludwig Schläfli, un poliedro regular P se identifica por el su símbolo de Schläfli [13] y se puede definir como:

En una dimensión Y=3, un poliedro regular P cumple que $P \subseteq \mathbb{R}^3$ [19] si:

- Las caras, en Y=2, de P son polígonos regulares.
- Para cada vértice V' de P, los extremos de las aristas L concurrentes en V' forman un polígono regular.

Por lo tanto, el símbolo de Schläfli de P es:

$$\{n, q\} \quad (24)$$

Esto significa que:

- Las caras, en Y=2, de P son polígonos regulares de n lados,
- Para cada vértice V' de P, los extremos de las aristas L concurrentes en V' forman un polígono regular de q lados [19].

Esto implica que, por su consistencia, en cualquiera de los vértices V' del poliedro P se unen q pirámides generando:

$$\cos \alpha_n = \cos \left(\frac{2\pi}{q} \right) \quad (25)$$

Los símbolos de Schläfli de los cinco poliedros convexos regulares son [14]:

Tabla 1.- Símbolos de Schlafli para poliedros convexos.

Nombre	Símbolo de Schlafli
Tetraedro	{3,3}
Hexaedro	{4,3}
Octaedro	{3,4}
Dodecaedro	{5,3}
Icosaedro	{3,5}

Para el cálculo del circunradio R de alguno de estos poliedros convexos, se obtiene la constante de proporcionalidad K (20) utilizando (25).

Por ejemplo, al buscar K en el tetraedro con su configuración {3,3} tenemos:

$$\cos \alpha_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos \alpha_3 = -\frac{1}{2} \quad (26)$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{1 - 2K^2}{1 - 4K^2} \quad (23)$$

Se iguala (23) con (26):

$$-\frac{1}{2} = \frac{1 - 2K^2}{1 - 4K^2}$$

$$-1 + 4K^2 = 2 - 4K^2$$

$$8K^2 - 3 = 0 \quad (27)$$

$$K^2 = \frac{3}{8}$$

$$K = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \quad (28)$$

$$K = 0.612372 \quad (29)$$

Notamos que (27) es la ecuación (20) del circunradio donde $R=K$ y (29) es el valor aproximado del mismo. Cabe señalar que en (28) se toma únicamente el valor positivo de la raíz cuadrada porque no existe circunradio negativo definido en los reales [11].

IV. RELACIÓN DE RECURRENCIA

Históricamente, los primeros polinomios ortogonales fueron los polinomios de Legendre, luego vinieron los polinomios de Chebyshev, los polinomios generales de Jacobi, los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre y Gegenbauer. [15]

Los polinomios de Chebyshev tienen gran importancia en la teoría de la aproximación, en el campo del análisis numérico; se trabajan en este artículo única y brevemente para definir una relación de recurrencia, la cual se aplica en los

poliedros de dos caras y sólidos arquimedianos con tres tipos de caras que se verán en la sección IV y V respectivamente.

El polinomio de Chebyshev de primer tipo $T_n(x)$ [16] de orden n se define como:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \quad (30)$$

De donde $x \in [-1,1]$ y $n = (0, 1, 2, \dots)$. Además, evidentemente al sustituir $\cos^{-1}(x) = \theta$, se obtiene la siguiente propiedad: [17]

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta); \theta \in [0, \pi], n = (0, 1, 2, \dots) \quad (31)$$

Entonces el polinomio $T_n(x), n \geq 1$, satisface las relaciones de recurrencia: [18]

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta$$

$$= \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta \quad (31.1)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta$$

$$= \cos \theta \cos n\theta + \sin \theta \sin n\theta \quad (31.2)$$

Y al sumarmas obtenemos:

$$T_{n+1}(\theta) + T_{n-1}(\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta$$

$$T_{n+1}(\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta - T_{n-1}(\theta) \quad (31.3)$$

Se regresa la variable $x = \cos \theta$:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cos(n \cos^{-1}(x)) - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (32)$$

De donde $n = (1, 2, 3, \dots)$. [16] [17] [18]

La relación de recurrencia también implica que cuando $n \geq 1$, $T_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficiente principal 2^{n-1} . [18]

Entonces para $n = 0, 1$ tenemos:

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad (33)$$

$$T_1(x) = \cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad (33.1)$$

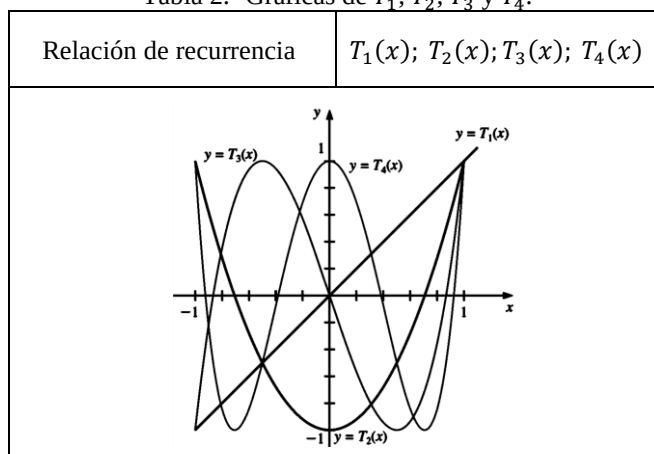
Puesto que $T_0(x) = 0$ y $T_1(x) = x$, la relación de recurrencia implica que los siguientes tres polinomios de Chebyshev sean: [17]

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (34)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (34.1)$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (34.2)$$

Tabla 2.- Gráficas de T_1, T_2, T_3 y T_4 .



Las gráficas de estos polinomios las podemos observar en la Tabla 2. Como se vuelve a observar, el coeficiente líder de x^n en $T_n(x)$ es 2^{n-1} y $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. [17]

V. POLIEDROS CON DOS TIPOS DE CARAS

Cuando se menciona un poliedro uniforme se habla respecto a un polígono transitivo en sus vértices [1]; en este caso se unen x polígonos de m lados con y polígonos de n lados generando dos tipos de ángulos diédricos respectivamente [11]:

$$\alpha_m; \alpha_n \quad (35)$$

Satisfaciendo la relación:

$$x\alpha_m + y\alpha_n = 2\pi \quad (36)$$

Se nota, que esta posible distribución de caras genera dos casos en concreto:

Caso 1:

$$x = y = 2 \quad (37)$$

Para este caso, se encuentra la ecuación del ángulo doble [8] de la siguiente manera:

Si $x = y = 2$ entonces:

$$2\alpha_m + 2\alpha_n = 2\pi$$

$$\alpha_m + \alpha_n = \pi$$

$$\alpha_m = \pi - \alpha_n$$

$$\cos(\alpha_m) = \cos(\pi - \alpha_n)$$

$$\cos(\alpha_m) = \cos(\pi) \cos(\alpha_n) + \sin(\pi) \sin(\alpha_n)$$

$$\cos(\alpha_m) = (-1) \cos(\alpha_n) + (0) \sin(\alpha_n)$$

$$\cos(\alpha_m) = -\cos(\alpha_n)$$

$$\cos(\alpha_m) + \cos(\alpha_n) = 0 \quad (38)$$

Con (38) se encuentran los valores de los circunradios R .

Por ejemplo, al buscar K del poliedro cuboctaedro, cuyo símbolo de Schläfli [14] es $\{3,2\} + \{4,2\}$, ya que tiene dos cuadrados y dos triángulos alrededor de cada vértice y se representan como la suma respectiva de $\{n, q\}$, cumpliendo la definición de (24). [22]

Entonces (38) queda de la forma:

$$\cos(\alpha_m) + \cos(\alpha_n) = 0$$

$$\cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0 \quad (39)$$

Para $\cos(\alpha_3)$ tenemos la expresión (23), (26) y (27):

$$\cos \alpha_3 = \frac{1 - 2K^2}{1 - 4K^2} \quad (23)$$

$$\cos \alpha_3 = -\frac{1}{2} \quad (26)$$

$$8K^2 - 3 = 0 \quad (27)$$

Para $\cos(\alpha_4)$ se realizan los siguientes cálculos utilizando (22) para la obtención del coseno del ángulo interior α_n :

Si $n=4$, entonces:

$$\cos \alpha_n = 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos \alpha_4 = 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \alpha_4 = 1 + \frac{8K^2}{1 - 4K^2} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos \alpha_4 = 1 + \frac{8K^2}{2(1 - 4K^2)}$$

$$\cos \alpha_4 = 1 + \frac{4K^2}{1 - 4K^2}$$

$$\cos \alpha_4 = \frac{(1 - 4K^2) + 4K^2}{1 - 4K^2}$$

$$\cos \alpha_4 = \frac{1}{1 - 4K^2} \quad (40)$$

$$\cos \alpha_4 = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$$

$$\cos \alpha_4 = -\frac{1}{8} \quad (41)$$

Se iguala (40) con (41):

$$\frac{1}{1 - 4K^2} = -\frac{1}{8}$$

$$8 = -(1 - 4K^2)$$

$$8 = -1 + 4K^2$$

$$4K^2 - 9 = 0 \quad (42)$$

Entonces (42) es la ecuación del valor de $\cos \alpha_4$; se sustituye (27) y (42) en (39).

$$\cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_4) = 0$$

$$(8K^2 - 3) + (4K^2 - 9) = 0$$

$$12K^2 - 12 = 0 \quad (43)$$

$$K^2 = 1$$

$$K = 1 \quad (44)$$

Por lo tanto, (43) es la ecuación del circunradio del cuboctaedro donde $R=K$ (20) y (44) es el valor de este.

Caso 2:

Esto caso ocurre en los Arquimedianos truncados [1]:

$$Si \ x = 1 \quad (45)$$

$$x\alpha_m + y\alpha_n = 2\pi$$

$$\alpha_m + y\alpha_n = 2\pi$$

$$y\alpha_n = 2\pi - x\alpha_m$$

$$\cos(y\alpha_n) = \cos(2\pi - \alpha_m)$$

$$\cos(y\alpha_n) = \cos(2\pi) \cos(\alpha_m) + \sin(2\pi) \sin(\alpha_m)$$

$$\cos(y\alpha_n) = (1) \cos(\alpha_m) + (0) \sin(\alpha_m)$$

$$\cos(y\alpha_n) = \cos(\alpha_m) \quad (46)$$

Se reescribe (46) utilizando (31):

$$T_y(\cos \alpha_n) = \cos(\alpha_m) \quad (47)$$

Notamos que (47) es la ecuación para hallar los circunradios de los Arquimedianos truncados [11]. Podemos ocupar (47) en un ejemplo, supongamos que queremos hallar el valor del circunradio R en el octaedro truncado:

Se define el símbolo de Schlafli [14] para dicho Arquimediano truncado:

$$V = \{4,1\} + \{6,2\} \quad (48)$$

Se utiliza (47) y se reescribe ocupando (48):

$$T_y(\cos \alpha_n) = \cos(\alpha_m)$$

$$T_2(\cos \alpha_6) = \cos(\alpha_4) \quad (49)$$

Se obtiene el $\cos(\alpha_6)$ y el $\cos(\alpha_4)$ utilizando (22):

$$\cos(\alpha_4) = \frac{1}{1 - 4K^2} \quad (40)$$

$$\cos(\alpha_6) = \frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2} \quad (50)$$

Se sustituye (40) y (50) en (49):

$$T_2\left(\frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2}\right) = \frac{1}{1 - 4K^2} \quad (51)$$

Se resuelve el Polinomio de Chebyshev (32) (Tabla 2) [15]:

$$T_2\left(\frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2}\right) = 2\left(\frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2}\right)^2 - 1$$

$$T_2\left(\frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2}\right) = \frac{-8K^4 + 16K^2 + 1}{1 - 8K^2 + 16K^4} \quad (52)$$

Se sustituye (52) en (51) y se resuelve:

$$T_2\left(\frac{1 + 2K^2}{1 - 4K^2}\right) = \frac{1}{1 - 4K^2}$$

$$\frac{-8K^4 + 16K^2 + 1}{1 - 8K^2 + 16K^4} = \frac{1}{1 - 4K^2}$$

$$(-8K^4 + 16K^2 + 1)(1 - 4K^2) = 1 - 8K^2 + 16K^4$$

$$32K^6 - 72K^4 + 12K^2 + 1 = 1 - 8K^2 + 16K^4$$

$$32K^6 - 88K^4 + 20K^2 = 0 \quad (53)$$

Aplicamos un cambio de variable [9]:

$$u = K^2; u^2 = K^4; u^3 = K^6 \quad (54)$$

Se reescribe (53) utilizando (54) y resolvemos:

$$32u^3 - 88u^2 + 20u = 0$$

$$4u(4u - 1)(2u - 5) = 0$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ 4u - 1 = 0 \rightarrow u = \frac{1}{4} \\ 2u - 5 = 0 \rightarrow u = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Se sustituye hacia atrás (54):

$$\begin{cases} K^2 = 0 \rightarrow K = 0 \\ K^2 = \frac{1}{4} \rightarrow K = \pm \frac{1}{2} \\ K^2 = \frac{5}{2} \rightarrow K = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Se nota que para $K = \pm \frac{1}{2}$ la ecuación (51) no está definida en $\mathbb{R}$, debido a que para todo número n' el producto $n'(0) = 0$ por lo que 0 no tiene inverso multiplicativo [23] [24]; por lo tanto, las soluciones son:

$$K = \left\{ 0, \sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}} \right\} \quad (55)$$

El valor de K que cumple con nuestras restricciones (19) y se vuelve nuestra ecuación simplificada es:

$$K = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad (56)$$

Con (56) se calcula el valor aproximado del circunradio R (20) del octaedro truncado.

$$R = K; K > 0 \quad (19)$$

$$R = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$R = 1.581138 \quad (57)$$

VI. SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS CON TRES TIPOS DE CARAS

La variación en estos tipos poliedros se presenta en sus vértices donde se une un polígono x de m lados, un polígono y de n lados y s polígonos de t lados [1] cumpliendo que:

$$\alpha_m + \alpha_n + s\alpha_t = 2\pi \quad (58)$$

Se reescribe (58) de la forma (31):

$$\begin{aligned} \alpha_m + \alpha_n + s\alpha_t &= 2\pi \\ s\alpha_t &= 2\pi - \alpha_m - \alpha_n \end{aligned}$$

$$\cos(s\alpha_t) = \cos(2\pi - (\alpha_m + \alpha_n))$$

$$T_s(\cos \alpha_t) = \cos(\alpha_m) \cos(\alpha_n) - \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_m} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_n} \quad (59)$$

Se observa que (59) es la fórmula para calcular el circunradio de este tipo de Arquimedianos [11].

VII. PEQUEÑO ROMBICOSIDODECAEDRO

Se define el símbolo de Schlafli [14] como:

$$V = \{3\} + \{5\} + 2\{4\} \quad (60)$$

Debido a que el pequeño Rombicosidodecaedro es un poliedro formado por polígonos regulares, se utiliza la definición $\{n, q\}$ (24) con la cual se establece que para cada vértice V, los extremos de las aristas concurrentes en V lo conforma un triángulo equilátero $\{3\}$, un pentágono regular $\{5\}$ y dos cuadrados $2\{4\}$ [22].

La configuración del vértice V (60) ayuda a sustituir los valores para utilizar (59); estos son m=3, n=5, s=2 y t=4.

$$\begin{aligned} T_s(\cos \alpha_t) &= \cos(\alpha_m) \cos(\alpha_n) \\ &\quad - \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_m} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_n} \\ T_2(\cos \alpha_4) &= \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) \\ &\quad - \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_5} \end{aligned} \quad (61)$$

Se reescribe (61) en función de la constante de proporcionalidad K.

$$\begin{aligned} T_2(\cos \alpha_4) &= \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) \\ &\quad - \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_5} \\ \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_5} &= \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) - T_2(\cos \alpha_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_5} \right)^2 &= (\cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) - 2 \cos^2 \alpha_4 + 1)^2 \\ (1 - \cos^2 \alpha_3)(1 - \cos^2 \alpha_5) &= (\cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) - 2 \cos^2 \alpha_4 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \alpha_3)(1 - \cos^2 \alpha_5) &= (\cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) - 2 \cos^2 \alpha_4 + 1)^2 \\ (\cos(\alpha_3) \cos(\alpha_5) - 2 \cos^2 \alpha_4 + 1)^2 &- (1 - \cos^2 \alpha_3)(1 - \cos^2 \alpha_5) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1-2K^2}{1-4K^2} \right) \left(\frac{1+(\sqrt{5}-1)K^2}{1-4K^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{1-4K^2} \right)^2 + 1 \right)^2 - \\ \left(1 - \frac{1-2K^2}{1-4K^2} \right) \left(1 - \frac{1+(\sqrt{5}-1)K^2}{1-4K^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(18K^4 + K^2(-11 + \sqrt{5}) - 2\sqrt{5}K^4)^2}{(1 - 4K^2)^4} + \frac{2K^4(-3 - \sqrt{5})}{(1 - 4K^2)^2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$K = \frac{\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}}{2} \quad (62)$$

$$K = 2.232950 \quad (63)$$

En (63) se obtiene el valor aproximado de la constante K que equivale al valor del circunradio R [1]. Este valor es necesario para calcular el volumen de este Arquimedianos.

El polígono regular de base, de cualquier pirámide, es de n lados y se puede dividir en n triángulos isósceles (Figura 9) (excepto en el hexágono regular) [6]. En dichos triángulos isósceles podemos obtener dos triángulos rectángulos (Figura 10), es decir, en un polígono de n lados tenemos 2n triángulos rectángulos [6].

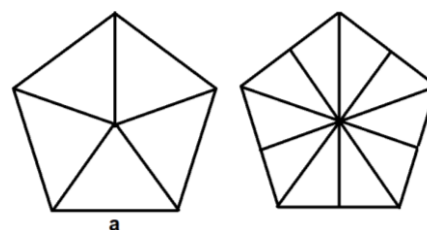


Figura 9.- n triángulos en un polígono regular.

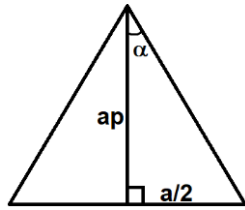


Figura 10.- Triángulos rectángulos.

Se define el área de la base S_b de la pirámide en relación con el área del triángulo rectángulo S_t como:

$$S_b = 2n \cdot S_t = 2n \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot a_p}{2}$$

$$S_b = \frac{n}{2} \cdot a \cdot a_p \quad (64)$$

De donde a_p es la apotema del polígono de base piramidal y a es la arista basal [6]; se encuentra su valor con [8]:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{a_p} = \frac{a}{2a_p}$$

$$a_p = \frac{a}{2 \tan \alpha} \quad (65)$$

Se define el ángulo α dividiendo el ángulo completo central entre el número de triángulos rectángulos [6]:

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n} \quad (66)$$

Se sustituye (65) y (66) en (64):

$$S_b = \frac{n}{2} \cdot a \cdot a_p$$

$$S_b = \frac{n}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$S_b = \frac{na^2}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$S_b = \frac{n}{4} \cdot a^2 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (67)$$

Por definición se sabe que el volumen de una pirámide es [20]:

$$V_p = \frac{S_b \cdot h}{3} \quad (68)$$

De donde V_p es el volumen de la pirámide y h su altura. Se sustituye (67) en (68):

$$V_p = \frac{\left(\frac{n}{4} a^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) h}{3}$$

$$V_p = \frac{n}{12} a^2 h \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (69)$$

Se relaciona la arista lateral ℓ con la altura h :

$$\ell = \left(h^2 + \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\ell)^2 = \left(\left(h^2 + \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$h = \sqrt{\ell^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \quad (70)$$

Se reemplaza (70) en (69):

$$V_p = \frac{n}{12} a^2 h \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$V_p = \frac{n}{12} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) a^2 \sqrt{\ell^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \quad (71)$$

Si $a = 1$ y $\ell = K$ entonces podemos generalizar con ayuda de la arista basal a la fórmula del volumen de una pirámide de n lados de base.

$$VP_n = \frac{n}{12} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{K^2 - \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \quad (72)$$

Para un poliedro de y caras de n lados $y\{n\}$, (72) se modifica en función de la arista basal a .

$$V = mVP_n = \frac{mn}{12} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \sqrt{K^2 - \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}} a^3 \quad (73)$$

El pequeño Rombicosidodecaedro tiene la configuración [11]:

$$x\{m\} + y\{n\} + s\{t\} \quad (74)$$

$$20\{3\} + 30\{4\} + 12\{5\} \quad (75)$$

Es decir, tiene x caras de m lados, y caras de n lados y s caras de t lados [1]; entonces, el volumen de este poliedro Arquimedeano de arista unidad a es:

$$V = xVP_m + yVP_n + sVP_t \quad (76)$$

$$\begin{aligned}
 xVP_m &= 20VP_3 \\
 &= \frac{20 \cdot 3}{12} \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}} a^3 \\
 xVP_m &= \frac{5(2\sqrt{5}+3)}{6} a^3 \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 yVP_n &= 30VP_4 \\
 &= \frac{30 \cdot 4}{12} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}} a^3 \\
 yVP_n &= 5(2+\sqrt{5}) a^3 \quad (78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 sVP_t &= 12VP_5 \\
 &= \frac{12 \cdot 5}{12} \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11+4\sqrt{5}}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} a^3 \\
 sVP_t &= 14.20820 a^3 \quad (79)
 \end{aligned}$$

$$V = xVP_m + yVP_n + sVP_t$$

$$V = \left(\left(\frac{5(2\sqrt{5}+3)}{6} \right) + (5(2+\sqrt{5})) + (14.208220) \right) a^3$$

$$\boxed{V = 41.63531 a^3} \quad (80)$$

La ecuación (80) sirve para encontrar el volumen del pequeño Rombicosidodecaedro en función de la arista basal a .

Para encontrar una relación similar a (80), pero en función del cálculo del área de este Arquimediano AR, primero se obtiene el área de cada tipo de sus caras (Figura 11).



Figura 11.- Caras del pequeño Rombicosidodecaedro.

De (75) se sabe que se debe obtener el área de: 20 triángulos equiláteros A_T , 30 cuadrados A_C y 12 pentágonos regulares A_P .

Para los 20 triángulos equiláteros:

Se calcula el área de un triángulo equilátero A_3 cuya base es la arista basal a por medio de su altura h' utilizando el Teorema de Pitágoras [10]:

$$\begin{aligned}
 h' &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\
 h' &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad (81)
 \end{aligned}$$

Si se sabe que la fórmula del área de un triángulo equilátero [6] es:

$$A_3 = \frac{1}{2} ah \quad (82)$$

Se reemplaza (81) en (82) y se simplifica:

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{2} a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) \\
 A_3 &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad (83)
 \end{aligned}$$

Se observa que (83) representa el área de un triángulo equilátero en función de a pero se necesita el valor del área del total de los triángulos A_T :

$$A_T = 20 (A_3)$$

$$A_T = 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

$$A_T = 5\sqrt{3}a^2 \quad (84)$$

Para los 30 cuadrados:

Se calcula el área de un cuadrado A_4 , cuya base es la arista basal a , utilizando la siguiente fórmula [6]:

$$A_4 = a^2 \quad (85)$$

Se nota que (85) representa el área de un cuadrado en función de a pero se necesita el valor del área del total de cuadrados A_C :

$$A_C = 30(A_4)$$

$$A_C = 30 a^2 \quad (86)$$

Para los 12 pentágonos regulares:

Se calcula el área de un pentágono regular A_5 utilizando la arista basal a y apotema j [6]. Se obtiene j utilizando la razón trigonométrica tangente $\tan$ [8] y se reescribe en función de j con ayuda de las propiedades de campo de los números reales $\mathbb{R}$ [23][24]:

$$\tan \frac{2\pi}{10} = \frac{a}{j}$$

$$2j = \frac{a}{\tan \frac{2\pi}{10}}$$

$$2j = a \cot \frac{2\pi}{10}$$

$$j = \frac{1}{2} a \cot \frac{2\pi}{10} \quad (87)$$

Se sabe que la fórmula del área de un pentágono regular [6] es:

$$A_5 = \frac{5 \cdot a \cdot j}{2} \quad (88)$$

Se sustituye (87) en (88):

$$A_5 = \frac{5 \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \cot \frac{2\pi}{10}}{2}$$

$$A_5 = \frac{\frac{5}{2} a^2 \cot \frac{2\pi}{10}}{2}$$

$$A_5 = \frac{5}{4} \cot \frac{\pi}{5} a^2 \quad (89)$$

Entonces (89) representa el área de pentágono regular en función de a pero se necesita el valor del área del total de los pentágonos A_p :

$$A_p = 12 (A_5)$$

$$A_p = 12 \frac{5}{4} \cot \frac{\pi}{5} a^2$$

$$A_p = 15 \cot \frac{\pi}{5} a^2 \quad (90)$$

Así (90) es el área de todos los pentágonos regulares del pequeño Rombicosidodecaedro. Finalmente, para encontrar el área AR de este se debe cumplir que:

$$AR = A_T + A_C + A_p \quad (91)$$

$$AR = 5\sqrt{3}a^2 + 30 a^2 + 15 \cot \frac{\pi}{5} a^2$$

$$AR = (5\sqrt{3} + 30 + 15 \cot \frac{\pi}{5}) a^2$$

$$AR = (5\sqrt{3} + 30 + 15 \cot \frac{\pi}{5}) a^2$$

$$AR = 59.30598 a^2 \quad (92)$$

VIII. CONCLUSIÓN

El pequeño Rombicosidodecaedro es un sólido de Arquímedes que es muy trabajado en los talleres de origami o recreado con papel, cartón, etc. [2] por su forma llamativa y su complejidad para elaborarlo.

En este artículo se espera que el lector haya modificado su punto de vista sobre este cuerpo geométrico, al observar la descripción de cómo se originan las expresiones para encontrar el área y el volumen, se motive para seguir analizando de una forma algebraica diversas estructuras y no solo se centre en papiroflexia o situaciones similares.

Además, se describe una herramienta muy útil, descomponer los sólidos en pirámides regulares, con la que se puede extrapolar a más temas o figuras para su análisis.

IX. REFERENCIAS

- [1] Cundy, H. & Rollett, A.: Mathematical Models. 3 ed. Tarquin Publications. (England, 1989).
- [2] Kasahara, K.: Origami Omnibus Paper Folding for Everyone. Japan Publications. (Tokyo, 1998).
- [3] Lorre, C. & Prady, B. (Productores): The Big Bang Theory Serie. HBO. (USA, 2007-2019).
- [4] Euler, L.: Introductio in analysin infinitorum. M. M. Bousquet. (1748).
- [5] Euler, L. & Blanton, J. Introduction to analysis of the infinite, Book 1. Springer. (N.Y., 1988).
- [6] Barnett Rich, P.: Plane Geometry. McGraw-Hill. (N.Y., 1967).
- [7] Bruño, G.: Elementos de la Geometría. Bouret, Rue Visconti. (París, 1909).
- [8] Cuevas, J. N.: Trigonometría Vol. 9. LIMUSA. (México, 1980).
- [9] Kalnin, R. A.: Álgebra y funciones elementales. 2 ed. MIR. (URSS, 1978).
- [10] Gray, J.: La Geometría Euclidiana y el Postulado de las Paralelas. Ideas de Espacio. (Madrid, 1992).
- [11] Wenninger, J. M.: Polyhedron Models. Cambridge University Press. (England, 1989).
- [12] Yakovlev, G. N.: Geometría. MIR. (URSS, 1985).
- [13] Katz, V.: A History of Mathematics: An Introduction. 3 ed. PEARSON. (USA, 2008).
- [14] MacDonald, H. S.: Regular polytopes. 3 ed. Dover Publications. (N. Y., 1973).
- [15] R. Álvarez.: Polinomios ortogonales: Historia, aplicaciones. Universidad de Granada. (España, 2001).
- [16] Vargas, J.C.: Sobre polinomios de Chebyshev y su generalización. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Bogotá, 2020).
- [17] Gil, A., Segura, J. & Temme, N.: Numerical Methods for special Functions. SIAM. (USA, 2007).
- [18] Burden, R., Faires, J. & Burden, A.: Numerical Analysis. CENAGE Learning. 10 ed. (USA, 2016).
- [19] Piskunov, N.: Cálculo diferencial e integral. 3 ed. MIR. (URSS, 1977).
- [20] Meserve, B. E.: Fundamental Concepts of Algebra. Addison-Wesley Publishing Company. (USA, 1953).
- [21] Stewart, J.: Single Variable Calculus: Concepts and Contexts. Cengage Learning. (USA, 2010).
- [22] Hilbert, D. & Vossen, C.: Geometry and the imagination. Chelsea Publishing C. (USA, 1952).
- [23] Peano, G.: Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. (Torino, 1889).
- [24] Dedekind. R.: Vorlesungen Uber Zahlentheorie de Dirichlet. 2 ed. (Alemania, 1871).

Modelado y construcción de una antena fractal basada en el triángulo de Sierpinski para captura electromagnética renovable.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.

fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo describe los resultados obtenidos al modelar matemáticamente, diseñar y manufacturar una antena monopolo fractal que utiliza la descripción del triángulo de Sierpinski como dispositivo de obtención de corriente eléctrica de las ondas electromagnéticas que viajan en el aire específicamente de 2.4 GHz para ser almacenada; se proponen distintas configuraciones que podrían generar energía eléctrica renovable libre de emisión de algún tipo para mover cargas utilizando supercapacitores como lo hacen tecnologías como los automóviles eléctricos modernos.

Palabras Clave- modelado matemático, fractal de Sierpinski, antenas, electromagnetismo, energía renovable.

Abstract- The article describes the results obtained by mathematically modeling, designing and manufacturing a monopole fractal antenna based on the Sierpinski triangle as an electromagnetic energy air grabber device transforming 2.4 GHz frequency waves into electrical current stored; describing different configurations that could generate emission-free renewable electrical power to move loads using supercapacitors like current electric car technology.

Keywords- mathematical modeling, Sierpinski fractal, antennas, electromagnetism, renewable energy

Mathematical Subject Classification: 78A50

I. INTRODUCCIÓN

Las antenas son dispositivos eléctricos que permiten ser inducidos por las ondas electromagnéticas, pudiendo aquellas que utilizan en su forma la geometría fractal lograr operar en distintas bandas de frecuencia; evitando requerir con éstos diseños múltiples antenas para cada señal requerida[1]. Otra ventaja es que al ser la geometría uno de los factores principales de su capacidad de inducción de las ondas, éstas antenas se pueden miniaturizar manteniendo el patrón; por lo que han tenido gran aceptación en los denominados dispositivos móviles[2].

Uno de los patrones fractales más utilizado en antenas y otras aplicaciones es la *curva triangular de Sierpinski* o *triángulo de Waclaw Sierpinski* [3] publicado en 1916, siendo una de las estructuras más citadas en Google y del cuál surgen aplicaciones en el triángulo de Pascal o las torres de Hanoi.

Hutchinson [4] con base en Mandelbrot [5] propuso los conjuntos estrictamente autosimilares y posteriormente Barnsley [6] genera un algoritmo para generar fractales denominado atractores de Sistemas Iterados de Funciones (SIF) pudiendo ser direccionados mediante una función del espacio de Cantor.

II. METODOLOGÍA

El prototipado rápido de hardware utiliza la metodología de desarrollo rápido de aplicaciones o RAD (Rapid Application Development)[7] siendo actualmente uno de los más usados al permitir lograr desarrollo y evaluación de modelos funcionales de nuevos diseños dentro de un proceso iterativo durante un intervalo de tiempo limitado.

Sus fases son el análisis de requerimientos del sistema para diseñar un prototipo; el cuál será construido, demostrado y refinado en un ciclo iterativo de versiones que son sometidas a pruebas hasta lograr las funciones requeridas para ser implementado; como se muestra en la figura 1.

Una vez utilizado la metodología RAD se puede pasar a la producción de un sistema.

Al ser un sistema experimental la energía renovable y no contar con marcos de referencia del sistema, la metodología RAD permite centrarse en los prototipos y pruebas de forma ágil.



Fig. 1. Metodología RAD.

Los requerimientos del sistema son la construcción de un sistema de antena monopolo de captura multibandas; principalmente la *popular 2.4 GHz*, por lo que el resto de éstas será descartado para las pruebas y sólo se centrará en ésta no descartando que puedan ser capturadas otras bandas, ya que a diferencia de otros trabajos éste no se centra en la modulación o demodulación de una señal o sus datos; si no más bien en la captura de las ondas electromagnéticas para su conversión en corriente eléctrica y su almacenamiento.

Se adquirieron dos supercapacitores electrolíticos de 3000f a 2.7 Voltios de QINFEN technologies similares a los automóviles eléctricos, los cuales son componentes que permiten el almacenamiento y descarga controlada de la corriente eléctrica almacenada por lo que el sistema deberá estar regulado a éste voltaje y deberá contar con la capacidad de conmutar a una modalidad de autonomía una vez cargados.

Para las pruebas se seleccionó un motoreductor Faulhaber con un desempeño máximo de 12 Voltios, consumo de 1.42 A, torque de 64:1, 17W y 8100RPMS sin carga; utilizado por el robot Kukulkan que fuera campeón 2010 en Mecawars RFL[8].

III. MODELO MATEMÁTICO DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI.

Definición 1:

Una *dimensión topológica*[9] t es un conjunto X con dimensión dim y puntos p son elementos del conjunto:

$$dim_t X = 0 \leftrightarrow \forall p \neq q \cap_{i \rightarrow 0}^{\lim} X; p \in X \quad (1)$$

Así mismo:

$$dim_t X = k \leftrightarrow \forall p \cap_{i \rightarrow 0}^{\lim} X | dim_t X = k - 1 \quad (2)$$

Definición 2:

Un *conjunto autosimilar*[6] $x \in X$ con puntos p es cumple la propiedad (K) si:

$$x \rightarrow K \leftrightarrow \forall p \in x \approx X \quad (3)$$

Es decir; en forma y estructura por lo que en una transformación $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deberá cumplir con alguna forma especial[6] manteniendo los ángulos siendo éstas:

a) Traslación[6]: comprende a los números reales $(e, f) \in \mathbb{R}^2$, $r \neq 0$ y ángulos θ ; $0 \leq \theta < 2\pi$.

θ es denominado el ángulo de rotación[6] donde r es el factor de escala siendo la transformación lineal:

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (5)$$

b) Rotación[6]: es la transformación lineal:

$$R_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

c) Reflexión[6]: es la transformación lineal:

$$R_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Definición 3:

Una *dimensión Hausdorff*[6] se define como:

$dim_H X | (X, d)$ es un espacio medible donde:

$$\forall p \subset dim_H(X) \quad (8)$$

Tendiendo la siguiente relación la dimensión Hausdorff dim_H respecto a una dimensión topológica y un fractal f :

$$f: X \rightarrow K \quad dim_H > dim_t \quad (9)$$

Definición 4:

Se propone para fines de descripción en éste artículo particular el uso del término **instanciación** denotado por el símbolo $\sqsubset$ para referirse al proceso ocurrido para la construcción de cada uno los patrones particulares autosimilares T_n -triángulos- en cada iteración i derivada de la duplicación de una “clase” de objeto (figura cerrada) general y original T_0 -triángulo- con las propiedades K descritas en (3) y/o pudiendo ser semejantes $T_n \sim T_0$.

El término comparte similitud con la definición informática propia de la *programación orientada a objetos* donde los objetos “**instanciados**” son copias de las “clases”; siendo éstas últimas descripciones programadas con propiedades específicas[10].

Las **instancias** mantienen una similaridad con su *clase* debido a la propiedad de “herencia” que guardan con su *clase padre*[10].

Definición 5:

Sea el conjunto X denominado *Triángulo de Sierpinski* [3] $X | T_S$ un triángulo equilátero T_0 ; como se muestra en la figura 2.



Fig. 2 T_0

mismo que es segmentado como primera iteración $i=1$ de T_0 en cuatro triángulos rectángulos $\{T_a \cong T_b \cong T_c \cong T_t\} \sim T_0$.

Por lo que la instanciación de T_0 viene dada por $\{T_a, T_b, T_c, T_t\} \sqsubset T_0$; siendo $T_t = T_0^c$; por lo que de $T_0 - T_t$ se obtiene el nuevo patrón $T_1 \{T_a \cong T_b \cong T_c\} | T_a, T_b, T_c \sqsubset T_0$; como se muestra en la figura 3 donde $T_1 = \{a, b, c\}$.

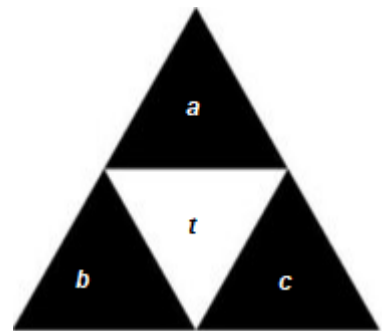


Fig. 3 T_1

Si se realizan continuas iteraciones de los procesos descritos anteriormente para cada $\sqsubset_n$ de triángulo T_0 generado se puede realizar un modelo general del conjunto iterativo que se define utilizando (1) y a T_S como:

$$X | T_S \cap_{n=0}^{\infty} T_n \quad (10)$$

Por lo que para cada iteración i se obtendrá un área A :

$$\frac{3}{4}A \in T_{n-1} \quad (11)$$

$$\therefore A_{T_S} = 0; \quad L_{T_S} = \infty \quad (12)$$

Si inicialmente T_0 cuenta con un perímetro $P_0 = 1$; para la primera iteración T_1 se obtendrá un patrón:

$$T_1 = T_0 - T_t \rightarrow P_1 = P_0 \frac{1}{2} \quad (13)$$

Similarmente para la segunda iteración T_2 se obtiene el patrón:

$$T_2 = T_1 - 3T_t \text{ y se que obtiene } P_2 = P_0 \frac{1}{4} \quad (14)$$

Como se muestra en la figura 4.



Fig. 4 T_2

generalizando el modelo anterior se obtiene que para la iteración n deseada:

$$P_n = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (15)$$

Como se muestra en la figura 5; por lo tanto:

$$1 + \frac{3^0}{2} + \frac{3^1}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{2} + \frac{3^4}{2} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{2^i} \rightarrow \infty \quad (16)$$



Fig. 5 T_3

Definición 6:

Sea j un círculo[6] con radio $r_i = \frac{1}{2}$

Teorema 1:

Utilizando(15) y (16) se infiere que la dimensión Hausdorff del triángulo de Sierpinski[6] anteriormente descrito $dim_H T_S$ está dada por:

$$dim_H T_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \quad (17)$$

Demostración:

Considerando las iteraciones i descritas en (15) y (16); mediante el teorema 1 (17) para generar para cada T_i un conjunto:

$$T_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) \quad (18)$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (19)$$

$$T_3(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad (20)$$

Siendo para la iteración $\{i\}_{\lim_{i=1}}^3$ exista su complemento de los triángulos ausentes para cada iteración como un complemento T_S^C donde $T_i \mid T_S \rightarrow \exists T_t = T_S^C$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \quad (21)$$

$$\therefore dim_H T_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \blacksquare \quad (22)$$

Utilizando (1) se deduce:

$$\mathbb{R}^n \mid S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow dim_t = 0 \leftrightarrow \forall p \neq \bigcap_{\lim_{i=1}}^n p; p \in S \quad (23)$$

Así mismo:

$$[p_1, p_2, p_3 \dots] \rightarrow dim_t = 0 \leftrightarrow [p_1, p_n] = d. \quad (24)$$

Por lo que para:

$$\forall \mathbb{Q} \rightarrow dim_t = 0 \quad (25)$$

Siendo para el conjunto Cantor $\mathbb{C}$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \rightarrow (\exists a < x; b > x) \notin \mathbb{C} \mid [a, b] \neq \bigcap_{\lim_{i=1}}^n \mathbb{C} \quad (26)$$

Utilizando (18) :

$$\mathbb{R}^n \mid S \subset \mathbb{R}^n \neq \emptyset \rightarrow dim_t = K \leftrightarrow \exists p \mid S \bigcap_{\lim_{i=1}}^n dim_{K-1};$$

$$k < \forall \mathbb{Z}^+ \neq K \quad (27)$$

Para $dim_t = 1$;la ecuación anterior la satisface por existir un círculo j con radio r :

$$k \leq 1 \mid \forall r_i \lim_{i \rightarrow 0} \cap \exists p; p \in dim_t = 0; p, r \in K. \quad (28)$$

También satisface la definición 4 para el X denominado Triángulo de Sierpinski[3].: $X \mid T_S$; siendo también que:

$$T_S \rightarrow dim_t \neq \emptyset \quad (29)$$

Por lo que para un círculo[6] $j \mid p \subset j$; $\exists(p \cap [\angle \in T_i]) \in T_i$ teniendo que:

$$j \cap [p_1, p_2, p_3] \in T_S; T_S \rightarrow K \quad (30)$$

$$\therefore \exists j_n | r_{n \rightarrow 0} \in T_S \quad (31)$$

$$\forall p \in T_S \rightarrow \exists r_i \dim_{K-1} \quad (32)$$

Siendo que para la describir un fractal se parte de la definición 2 para describir la autosimilaridad K descrita en (3) con lo que se genera la siguiente definición:

Definición 7:

Para T_S su dimensión fractal[9] queda denotada como $A \in \dim_H(X)$ donde (X, d) es un espacio métrico denotado por un número $M(A, \varepsilon)$ de iteraciones il $T_i \rightrightarrows T_0$ de tamaño $\varepsilon > 0$ para cubrir A si existe denominado $\dim_{fractal}(A)$ [6] en la escala dimensional de los T_i siendo:

$$\dim_{fractal} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln[M(A, \varepsilon)]}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \right\}; \dim_{fractal} \rightarrow K | \dim_H > \dim_t. \quad (33)$$

Teorema 2:

Utilizando (17) y (26) se obtiene que una dimensión $\mathfrak{C}$ se encuentra comprendida como el recíproco de (17):

$$\dim_{fractal} \mathfrak{C} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (34)$$

Demostración 2:

Dada la definición 7 con las descripciones anteriormente dadas en (17) y (26) para un $\mathfrak{C}M = 2$ y utilizando (34) se obtiene un límite ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \blacksquare \quad (35)$$

Teorema 3:

Para una dimensión fractal para un $\mathfrak{C}_\alpha$ con base en (34) y (35):

$$\dim_{fractal} \mathfrak{C}_\alpha = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)} \quad (36)$$

Demostración 3:

Como se utilizó en (35) con (17) y (26); para (36) con un $\mathfrak{C}_\alpha$ y un límite ε :

$$\mathfrak{C}_{\alpha-\frac{1}{2}M} = 2; \varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} \blacksquare \quad (37)$$

Teorema 4:

Para una dimensión fractal K con las propiedades (3) se obtiene generalizando a (35):

$$\dim_{fractal} K(n) = \frac{\ln(m+1)}{\ln(2m+1)} \quad (38)$$

Demostración 4:

Para un $\mathfrak{C}_{n-ario}$ sobre una $\dim_{fractal} K(n)$ descrita en (38) con base a la definición 7 se tiene que:

$$\mathfrak{C}_{n-ario} M = m + 1; \varepsilon = \frac{1}{2m+1} \blacksquare \quad (39)$$

Teorema 5:

Para el triángulo de Sierpinski[3] (29) su $\dim_{fractal}$ aplicando el teorema 1 (17) con base a (38) se obtiene que:

$$\dim_{fractal} T_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \quad (40)$$

Demostración 5:

Cuando $i = 1$; se generan $T_n \rightrightarrows T_S$ siendo:

$$T_{i=1 \rightarrow} [T_a, T_b, T_c]; \varepsilon = \frac{1}{2} \quad (41)$$

Por lo que utilizando el teorema 5:

$$\dim_{fractal} T_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \blacksquare \quad (42)$$

IV. DISEÑO DE LA ANTENA FRACTAL BASADA EN EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI.

Continuando con la metodología RAD[7] para el diseño de la antena se utilizó el modelo matemático descrito en (15) para obtener a T_4 ; como se describe en la figura 4 contando con las propiedades descritas en (16),(17),(30) y (34) .

Por lo que utilizando (15) para una tercera iteración se obtiene:

$$P_3 = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad (43)$$

Al diseñar un triángulo equilátero de $L = 8.8$ se tiene un $P_0 = 26.4$ y sustituyendo en (43) se obtiene el nuevo perímetro:

$$P_3 = 26.4 \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 89.1 \quad (44)$$

Así mismo para su área siendo originalmente $A = 33$ se obtiene:

$$A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A = 13.92 \quad (45)$$

Con lo que también se cumple (16).

Definición 8:

Sea f el factor multiplicativo[6] $\neq \{0,1\}$ de escala $f(T_n)$ que permite que $T_n \cong T_S$; con un perímetro $PT_n \neq PT_S$; área $AT_n \neq AT_S$ y siendo $T_n \rightrightarrows T_S$.

Con base en la definición 8 la $\dim_{fractal}$ definida en (33) para el T_S genera el grado de fragmentación brindado por $\mathfrak{P}_{nésima}$ de objeto original n ; es decir un autoensamblado geométrico.

Utilizando (34) se obtiene:

$$dim_{fractal} = \frac{\ln(\frac{1}{f_{T_{n+1}}})}{\ln(\frac{1}{f_{T_n}})} \quad (46)$$

Por lo que para lograr $T_3 \approx T_s$ descrito en la figura 5 se debe aplicar (46) obteniendo:

$$dim_{fractal} T_3 = \frac{\ln(\frac{3}{\frac{1}{2}})}{\ln(\frac{1}{\frac{1}{2}})} = 1.58 \quad (47)$$

La frecuencia resonante de una antena está relacionada con su longitud (mm); siendo el triángulo (47) $T_3 \approx T_0$ con distinto perímetro y área como se describió en (11)...(16).

La simulación fue realizada en Altair FEKO obteniendo las siguientes simulaciones para un diseño basado en la figura 5 y el modelo matemático (47), como se muestra en la figura 6 y su irradiación a 2.4 Ghz en la figura 7.

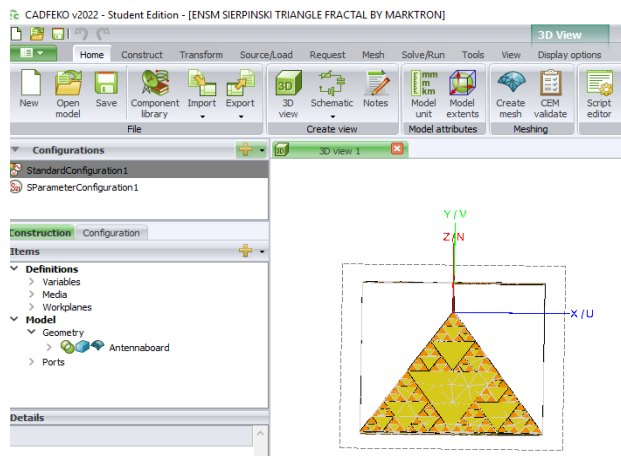


Fig. 6. Simulación de antena monopolo basada en el modelado matemático (47).

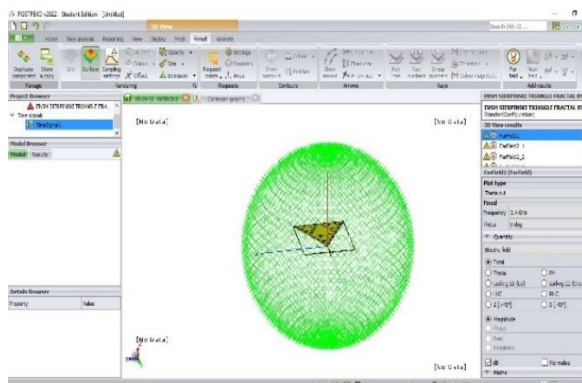


Fig. 7. Simulación de antena monopolo irradiada a 2.4 Ghz (47).

Así mismo la pérdida de retorno en la antena en la simulación describe que el patrón de radiación de la antena tiene a una frecuencia de 2.4 Ghz una ganancia constante de 2.25 dBi, como se muestra en la figura 8.

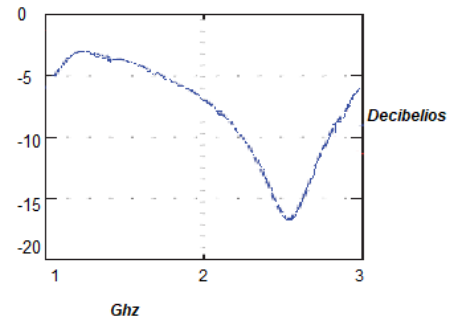


Fig. 8. Pérdida de retorno de la antena monopolo

V. DISEÑO DEL SISTEMA PARA CAPTURA ELECTROMAGNÉTICA RENOVABLE.

Para capturar la energía electromagnética que viaja en el aire se procedió a diseñar un circuito que obtenga la diferencia de potencial (ddp) de cargas electromagnéticas sobre un conductor; es decir un sistema en donde la corriente deje de fluir cuando ambos puntos igualen su potencial eléctrico.

Si se tiene una energía J obtenida del monopolo m brinda al circuito durante su funcionamiento; ésta es directamente proporcional a su dpp en voltios V y a una carga Q que es transmitida en el conductor.

Siendo su ddp :

$$V = \frac{J}{Q} \quad (48)$$

Para la recepción electromagnética las ondas de radio que llegan al monopolo m mediante la inducción electromagnética de una tensión.

Si bien la antena captura las frecuencias de 2.4 Ghz en corriente alterna; ésta debe ser rectificada para dirigir el paso de corriente eléctrica unidireccionalemnte a modo de generar los dos polos de la corriente directa para poder ser cargado en un sistema de almacenamiento o carga, por lo que se hace uso de diodos semiconductores polarizados.

Para la presente aplicación se seleccionó el diodo de germanio 1N270 debido a contar con una tensión de polarización mínima directa 0.3 Voltios a diferencia de sus contrapartes de silicio como el 1N4001 que comienza su corte de saturación a partir de 0.7 Voltios.

Para el filtro capacitivo se realizó un diseño de rectificación formado inicialmente por dos capacitores cerámicos $0.224\mu f$ que modulan los picos de los armónicos de alta frecuencia en carga y un segundo filtro de dos capacitores electrolíticos de $470\mu f$ que aseguran la carga polarizada para cada polo.

La antena deberá entonces contar con una buena respuesta de ganancia ante la pérdida de la señal reflejada.

La conversión de eficiencia queda definida por[120]:

$$\eta = \frac{P_{DC}}{P_{DC} + P_{Loss}} \quad (49)$$

Siendo P_{DC} es la energía de salida y P_{Loss} es la energía perdida; así mismo como el monópolo m rectifica corriente directa su salida viene dada por:

$$P_{DC} = \frac{V_{out}^2}{R_L} \quad (50)$$

Siendo V_{Out} el voltaje de salida del rectificador y R_L la carga. La eficiencia de conductividad considera la pérdida dada por el diodo de germanio; siendo la la eficiencia definida como:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{V_d}{2V_{Out}}} \quad (51)$$

Siendo V_d el voltaje que fluye por el diodo y V_{Out} el voltaje de salida.

El sistema de rectificación de carga se diseñó mediante un prototipado responde al ciclo iterativo de la metodología RAD[7] al diseñar un sistema de almacenamiento basado en el supercapacitor de 3000f a 2.7 Voltiosde QINFEN technologies; por lo que se utilizó como regulador de tensión ajustable un LM317 en función del potenciómetro 1 de 5K Ω y R1 de 220 Ω .

Puesto que los supercapacitores seleccionados requieren 5 Amperios de carga cada uno y el LM317 sólo brinda 1 Amperio, éste no podría cargarlos; por lo que se seleccionó un regulador de paso mediante el transistor MOSFET MJE2955 y un circuito resistencia-capacitor para evitar picos por R2 de 2 Ω para carga directa y C5 de 0.33 μ f.

Para la manufactura de la antena se procedió a diseñar el patrón en PCB y soldar para obtener una antena monopolo m , como se observa en la figura 9.



Fig. 9. Monopolo basado en el modelado matemático antes y después de su exposición al ácido férrico.

En la figura 10 se muestra el diseño del prototipo[7] con la opción de incorporar la separación del módulo de carga con el de operación autónoma al activar el conmutador SW1.

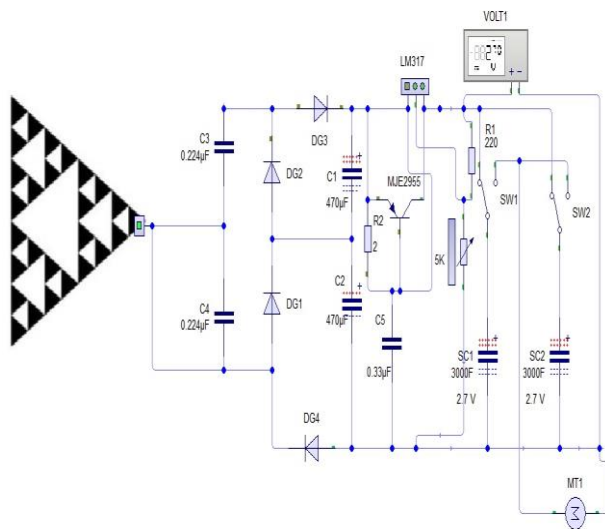


Fig. 10. Circuito de rectificación y carga de la antena monopolo m con sistema de operación autónoma.

Una vez cargados los supercapacitores son capaces de brindar una salida de corriente directa de 2.7 Voltios; como se muestra en la figura 11.

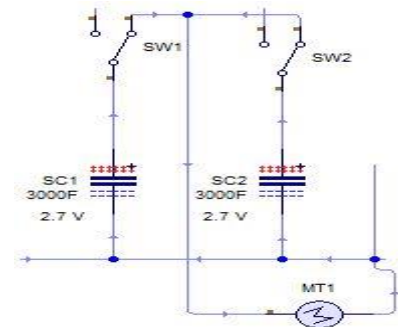


Fig. 11. Circuito de operación autónoma mediante dos supercapacitores de 2.7 Voltios.

VI. PROTOTIPADO RÁPIDO.

Continuando con la metodología RAD[7] y utilizando el monopolo de la figura 5 y el circuito de la figura 6 se procedió al prototipado del rectificador ddp de la antena m como se muestra en la figura 12.

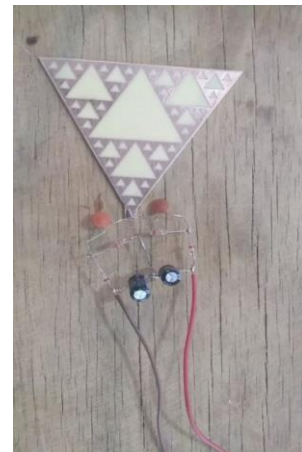


Fig. 12. Prototipo del circuito rectificador ddp de la antena monopolo m a 2.7 Voltios.

VII. PRUEBAS DE FUNCIONAMIENTO.

Se realizaron pruebas de funcionamiento bajo la metodología RAD[7] cerca de una la señal de un modem HG8145V5 de 2.5 – 5 Ghz obteniendo la inducción en la antena m con 2.7 Voltios en 189 segundos comportándose semejante a una fuente de carga; sin embargo al no contar con amperaje éste debe ser almacenado en los supercapacitores de 3000f a 2.7 Voltiosde QINFEN technologies, como se muestra en la figura 13.

Al conectarlo a una carga de un motorreductor Faulhaber con un desempeño máximo de 12 Voltios, consumo de 1.42 A, torque de 64:1 17w 8100RPMs sin carga; éste presentó un desempeño de 54,034 segundos.

Continuando con las iteraciones RAD[7] se realizó el refinamiento mediante un segundo prototipo con el acoplamiento de cuatro antenas bajo un cuadripolo formando un tetraedro, obteniendo 2.7 Voltios en 135 segundos; es decir un incremento del 40% de velocidad, como se muestra

en la configuración de la figura 14 siendo ésta última versión en la metodología RAD la de implementación[7] .



Fig. 13. Carga con motoreductor del circuito de rectificación y carga de la antena monopolo m con sistema de operación autónoma.

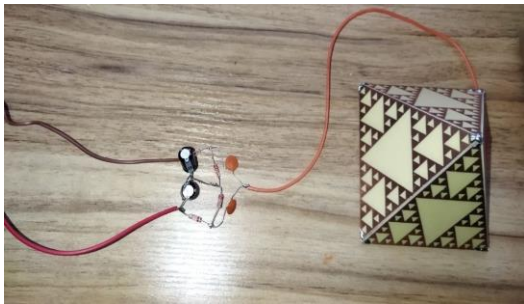


Fig. 14. Prototipo cuatriplio tetraedro.

El prototipo puede ser diseñado en más iteraciones y asegurar la captura de otras bandas .

REFERENCIAS

- [1] A. Balanais Constantine, Modern antenna handbook. 2008. Wiley. Canada.
- [2] A. A. Potapov, The base of fractal antenna theory and applications: Utilizing in electronic devices. IEEE Conference Publications. 2013. Pp. 62-67.
- [3] W. Sierpinski. Sur une curve dont tout point est un point de ramification. Prace Mat.– Fiz bf 27 (1916).
- [4] J. E. Hutchinson. Fractals and Self-Similarity. Indiana University Journal of Mathematics 30 (1981), 713–747.
- [5] B. Mandelbrot. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Flammarion, 1975.
- [6] M. Barnsley. Fractals Everywhere. Second Edition. Academic Press, Inc., 1993.
- [7] O'BRIEN, JAMES. 2003. Sistemas de información gerencial. Cuarta Edición. Irwin-McGraw Hill. Colombia.
- [8] <https://en-academic.com/dic.nsf/enwiki/3156966>
- [9] Erin Pearse, An Introduction to dimension theory and fractal geometry: Fractal dimension and measure, California Polytechnic State University.
- [10] Erich Gamma, Richard Helm, Ralph Johnson, and John Vlissides. 1995. Design patterns: elements of reusable object-oriented software. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA.

VIII. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Al realizar el modelado matemático(47) de instancias $\square$ iterativas del triángulo de Sierpinski [3]; éste permitió el diseño del patrón fractal de la figura 5.

El patrón de la figura 5 permitió la simulación CAD en Feko descrito en las figuras 6 y 7; obteniendo la inducción de una señal de 2.4 GHz de la figura 8.

Al utilizar la metodología RAD[7]; ésta permitió la manufactura de una antena monopolo basada en el modelo (47) descrito en la figura 5.

El prototipado rápido y constante refinamiento de cada versión del sistema[7] permitió construir el prototipo de la figura 12.

El último refinamiento del prototipado[7] generó el tetraedro de la figura 13, cuyo modelo puede ser estudiado en futuros trabajos que involucren la construcción de sólidos de tipo fractal[6].

El prototipo de rectificación logra capturar en su última versión cuatripolo la captura electromagnética renovable de 2.7 Voltios en 135 segundos contra los 189 de una antena monopolo.

El prototipo de antena y rectificación es limpio al no emitir alguna emisión contaminante y no degenerarse.

Una malla de antenas fractales con rectificador podrían cargar en unos cuantos segundos todo el sistema de una casa off-grid o incluso maquinaria.

Los supercapacitores QINFEN permitieron de forma autónoma y continua el suministro energético del motoreductor Faulhaber durante 13 horas.

Modelo matemático de predictibilidad para el incremento de ventas mediante una campaña de enahning de Central de Pisos y Alfombras S.A. de C.V.

Mateos Sánchez Areli Guadalupe.

Estudiante de la Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

areg.mats@aefcm.nuevaescuela.mx

Resumen- El artículo explica la forma en que se diseñó un modelo matemático de predictibilidad que permite el incremento de ventas en una empresa ya que durante el último año las ventas fueron disminuyendo, por lo que se decidió implementar campañas de marketing y el desarrollo en algunos modelos de predictibilidad como suavizados exponenciales y modelo Holt Winters.

Palabras Clave- modelado matemático, análisis de predictibilidad, marketing, suavizado, enahning.

Abstract- The article explains the way in which a mathematical model of predictability was designed that allows us to increase sales in a company since during the last year sales were decreasing, so it was decided to implement marketing campaigns and the development of some predictability models such as exponential smoothing and the Holt Winters model.

Keywords- mathematical modeling, predictability analysis, marketing, smoothing, enahning

Mathematical Subject Classification: 65D10.

- Los datos a pronosticar y evaluar el funcionamiento del modelo propuesto.

Media Aritmética.^[2]

Definición: Sea la sucesión cuyos términos sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ designado con $\bar{X}$ a la media aritmética obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$.

Varianza.^[2]

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$. La varianza de X se define como el número:

$$\begin{aligned} ar(x) &= E[x^2] - (E[x])^2 \\ var(x) &= E[(x - E(x))^2] \\ var(x) &= E[x^2 - 2Ex + (Ex)^2] \\ var(x) &= Ex^2 - (2E(x))^2 + E(x)^2 \\ var(x) &= E(x^2) - E(x)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Distribución Poisson.^[2]

Definición: Una variable aleatoria X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ si toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$, con probabilidad dada por:

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (3)$$

Calculamos la función generadora de la probabilidad de una variable de este tipo:

$$\varphi_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)} \quad (4)$$

Dada esta expresión podemos obtener los momentos de la distribución:

$$E[X] = \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=1} = \lambda e^{\lambda} \big|_{s=1} = \lambda$$

I. MODELO HOLT WINTERS

^[1]El método Holt Winter considera nivel, tendencia y estacionalidad de una determinada serie de tiempos. El modelo está basado en 2 principales modelos que dependen del tipo de estacionalidad.

El modelo multiplicativo estacional, que dice que a medida que se incrementan los datos incrementan el patrón estacional.

El modelo aditivo estacional, modelo en que los efectos de los factores individuales se diferencian y se agrupan para modelar los datos.

Para este modelo hay 3 conjuntos de datos:

❖ Primer conjunto:

- Determinar los indicadores de nivel, tendencia y estacionalidad.

❖ Segundo conjunto:

- Datos necesarios para probar los índices de la suavización (α, β, γ).

❖ Tercer conjunto:

$$E[x(x-1)] = \frac{d^2\varphi}{ds^2} \Big|_{s=1} = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \Big|_{s=1} = \lambda^2$$

$$E[x^2] = E[x(x-1)] + E[x] = \lambda^2$$

$$var(x) = E[x^2] - (E[x])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad (5)$$

II. MODELO MATEMÁTICO

Se inició el diseño con los diferentes tipos de modelos, realizando pruebas que pudieran ser funcionales una vez encontrado el modelo ideal que se ajuste con las necesidades de la empresa, por lo que se realiza el diagrama de flujo que sigue la ejecución del desarrollo del modelo, como se muestra en la figura 1.

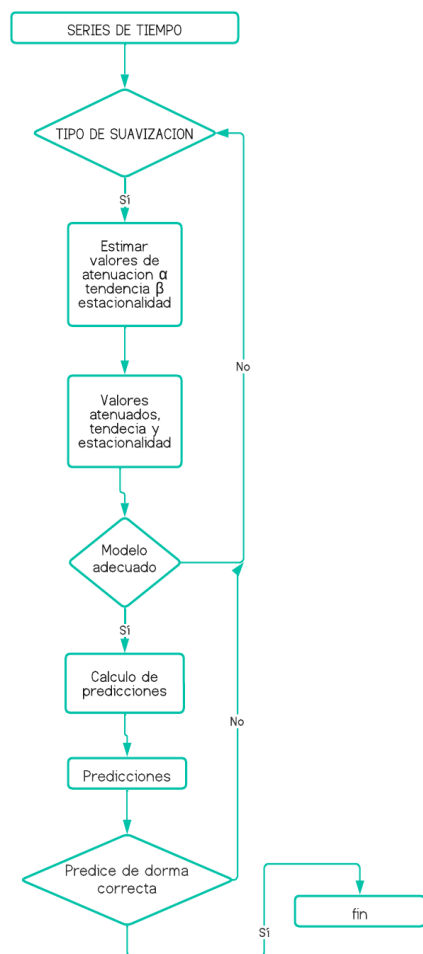


Figura 1 Diagrama de flujo del modelo matemático

Series de tiempo ^[3]

Son unas sucesiones de datos que se miden en determinado tiempo y ordenados cronológicamente, los datos pueden tener intervalos o espaciados.

Estas series aplican a datos registrados en forma periódica que muestran, ventas anuales, ventas trimestrales, mensuales, etc.

Tipos de suavización ^[3]

Como se vio en el marco referencial existen varios métodos de suavización exponencial, donde se probó cada uno de los métodos investigados para obtener los resultados y requerimientos que la empresa necesitaba.

Estimación de valores ^[3]

En esta parte del proceso se daban valores al azar para las variables, buscando un valor óptimo que cumpla las necesidades que se requiere, al encontrar el la función generadora valor que cumpla con las condiciones se procede al cálculo del nivel, tendencia y estacionalidad.

Cálculo del nivel, tendencia y estacionalidad

En este apartado del diagrama, se ocupan las formulas obtenidas anteriormente, donde:

k=coeficiente de suavizacion

D_t=valor de datos en el tiempo t

S_t=el componente estacional en tiempo t

L=periodo estacional

A_(t-1)=es el nivel en el tiempo

T_(T-1)=tendencia en el tiempo.

Nivel

Es la cantidad de periodos que representa la agregación de datos, usualmente lo podemos encontrar por días, meses, semanas, años.

Basado en la fórmula 6, se logra realizar la parte del nivel de confianza del modelo a desarrollar donde nuestro coeficiente de suavización es k

$$\left[\left(k \left(\frac{D_t}{S_{t-L}} \right) + (1-k)(A_{t-1} + T_{t-1}) \right) \right] \quad (6)$$

Tendencia

Es el comportamiento o movimiento de los datos a través del tiempo a largo plazo

Se logra realizar la fórmula de tendencia del modelo dejando el coeficiente para la tendencia en el mismo valor k para este modelo:

$$[((k(A_t - A_{t-1}) + (1-k)(T_{t-1}))) \quad (7)$$

Estacionalidad

Es un patrón que se observa en una serie de tiempos puede ser subida o bajada. No es necesario que tenga que pasar mucho tiempo representarlos con solo días se puede obtener:

$$[(D_{t-L} + D_{t-2L}) / \sum_{n=t-2L}^{n=t-1} D_n] * L \quad (8)$$

Si el modelo es adecuado podemos seguir a los pasos finales si no regresamos al paso a la búsqueda de un paso adecuado.

III. CÁLCULO DE PREDICCIONES.

En este paso se aplican las fórmulas obtenidas, esperando sean de utilidad para la resolución de las necesidades que se presentan en el documento.

En caso que las predicciones sean correctas se llega al fin del proceso, demostrando que es de utilidad lo diseñado.

Una vez aplicando el diagrama de flujo en base a los métodos aplicados, logramos obtener la ecuación

correspondiente a que seguirá a nuestro modelo usando la 6,7 y 8, para obtener:

$$F_{t+m} = \left[\left(k \left(\frac{D_t}{S_{t-L}} \right) + (1-k)(A_{t-1} + T_{t-1}) \right) + \left((k(A_t - A_{t-1}) + (1-k)(T_{t-1})) \right) \right] \left[(D_{t-L} + D_{t-2L}) / \sum_{n=t-2L}^{n=t-1} D_n \right] * L \quad (9)$$

Alpha y beta son independientes una de la otra. No tienen que totalizar 1. Para nuestro modelo α y β al valer lo mismo se le cambio por “k” para ambos casos

Para poder trabajar con este nuevo modelo será necesario mantener los datos consecutivos, es decir no tener ausencia de datos en los periodos de aplicación ya que a la falta de datos la predicción no será tan correcta como esperamos porque se está utilizando un 99% de confianza.

El diagrama de flujo que se elaboró presentado en la figura 1 fue funcional para generar las iteraciones, mientras el método fue desarrollado.

A continuación, se explica cómo se realizó el proceso del trabajo completo:

- Se exportó una base de datos de la empresa a Power BI, para poder trabajar lo datos.
- Se calculó el total de ventas obtenidas cada uno de los años a partir del 2006 hasta el 2021.
- Se realizaron pruebas con diferentes métodos de aproximación como suavización exponencial simple y doble, método Box Jenkins, promedio simple móvil y media móvil, pero ninguno lograba llegar a las metas que la empresa solicitaba.
- Se decidió probar el método Holt-Winter para mayor eficiencia y lograr mejores ventas, solo dejando fijos dos datos (α y β) y la estacionalidad trabajándola durante 1 a 12 meses.
- Una vez analizando los resultados que se encontraban en la predictibilidad se decidió realizar los cambios en lugar de definir un α y β ya que ambos tenían el mismo valor se definió de nombre k y manteniendo un valor de 0.99 en figura 2.

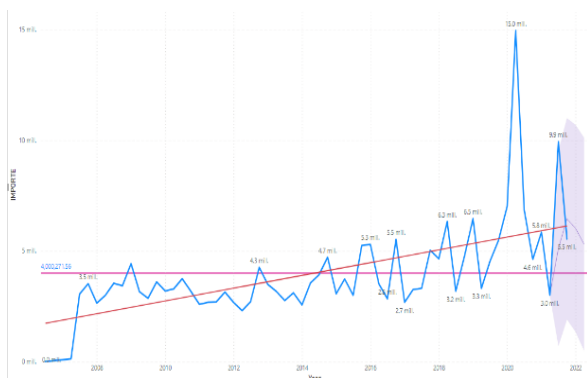


Figura 2 Aproximación de ventas durante el último semestre del 2021 y año 2022

IV. CONCLUSIONES.

Basado en el modelo Holt Winters descrito en el apartado 2.3, se diseñó una aproximación, como se muestra en la figura 2, en donde se analizó la fórmula lográndose modificar los valores alfa y beta con un k de 0.999; logrando una predictibilidad de 95.07% de confianza, como se muestra en la figura 3.5, en donde solamente se utilizaron los valores históricos de los datos del último año

Al haber obtenido la ecuación que satisface parcialmente en un 95.07%, el fenómeno, como se muestra en la ecuación 9; ésta permitió computarla utilizando todos los datos del periodo 2006 al 2021, logrando una predictibilidad más exacta del 95.07%, como se muestra en la figura 2 en donde la gráfica de la predictibilidad es similar a la de las ventas reales.

REFERENCIAS

- [1] conomipedia . (2022). *Economipedia*. Recuperado el 04 de 2022, de <https://economipedia.com/definiciones/suavizacion-exponencial.html>
- [2] Rincón, L. (2016). *Introducción a la probabilidad* . México : Universidad Autónoma de México.
- [3] Barnett, Ziegler, Byleen. Álgebra. McGraw Hill, p.488-500 (2000).

Fractal lineal cruz, modelos de probabilidad y cálculo diferencial para reestructuración impositiva.

Fernando Gustavo Isa Massa

FRT-UTN Universidad tecnológica nacional – Facultad regional Tucumán

Moreno 935, San Miguel de Tucumán- Tucumán, Argentina

ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- Los estados modernos se financian con distintos activos: emisión monetaria, impuestos, créditos y bajar costos. Sin embargo, se piensa que ante la escasez de dinero se deben de aumentar los impuestos; argumento que se niega empíricamente en el presente trabajo de investigación. Se usa un fractal lineal (derivada de datos discretos), un modelo de estadística circular y finalmente un modelo de cálculo diferencial, todos originales. Además, se demuestra que este incremento en la recaudación al bajar puntos del impuesto a los pobres y clase media: IVA, se traduce en una baja de la evasión.

Palabras Clave- calculo diferencial, Estadística circular, Fractal lineal, impuesto IVA.

Abstract- Modern states are financed with different assets: monetary issue, taxes, credits and lower costs.

However, it is thought that given the scarcity of money, taxes should be increased; argument that is empirically denied in this research work. A linear fractal (derivative of discrete data), a circular statistical model and finally a differential calculus model, all original. In addition, it is shown that this increase in collection by lowering tax points for the poor and middle class: VAT, translates into a decrease in evasion.

VAT, translates into a decrease in evasion.

Keywords- differential calculus, circular statistical, linear fractal, tax VAT.

Mathematical Subject Classification: 46N30

I - Introducción

El trabajo de investigación indaga como reformular el cobro del impuesto IVA, bajando los puntos porcentuales de su cobro; y obteniendo con ello una disminución de la evasión. La disminución de la evasión compensa lo que se deja de recaudar por baja de puntos porcentuales del impuesto. Se demuestra con modelos originales, que este impuesto (llamado impuesto a los pobres); es regresivo ya que los trabajadores y la clase media al no poder ahorrar en un banco su dinero lo consume todo y por lo tanto paga IVA.

II – Teoremas

A – Teorema fractal cruz y derivada de datos discretos

Si existe un eje coordenadas cartesianas y deducibles en el círculo, entonces el fractal lineal que corta en dos sus ejes de abscisas en forma de auto similitud y con dimensión fractal; es la derivada de datos discretos de cada dato que se origina de otro dato dentro del círculo y el fractal cruz.

Demostración

Veamos las condiciones necesarias y suficientes de los fractales lineales que son la auto similitud y la dimensión fractal. La auto similitud se demuestra en forma gráfica en su repetición estadística y la dimensión pasamos a calcularla a continuación:

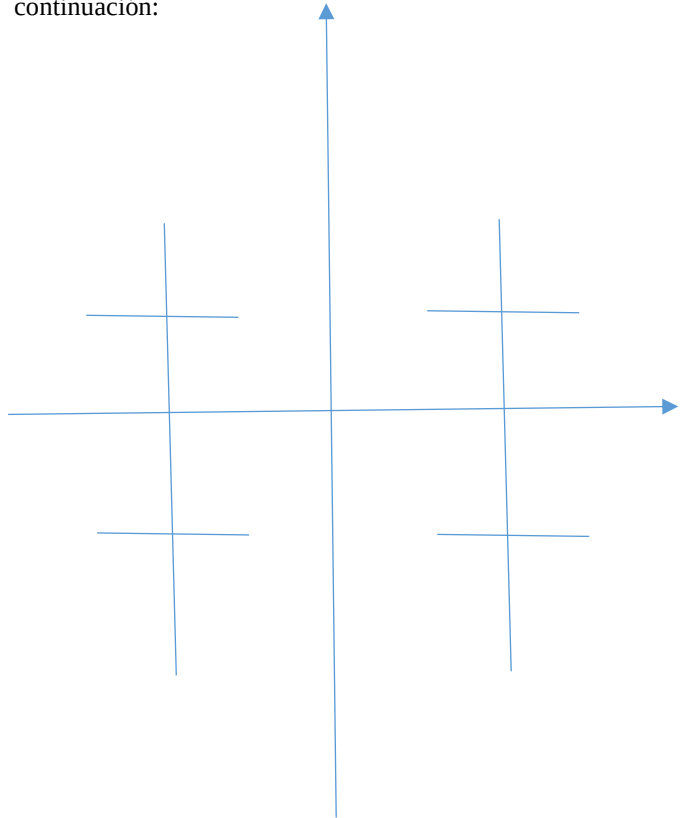


Fig. 1 Autosimilitud

El eje de coordenadas cartesianas es dividido en dos en cada uno de los ejes de las abscisas, una y otra vez cambiando o rotando la orientación en 90° .

De esta manera se demuestra la auto similitud en forma grafica

La dimensión fractal pasamos a demostrar.

$$N = F^d \quad [5]$$

N: Número de copias

F: Factor de reducción

D: Dimensión

En nuestro fractal tenemos 3 copias y el factor de reducción es 2 cortes

$$3 = 2^d$$

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$D = 1,584962$$

Por lo tanto, demostramos que es una dimensión fractal al ser un valor no entero.

Definición de fractal lineal: Los fractales lineales son aquellos que se construyen con un cambio en la variación de sus escalas, es decir, son exactamente idénticos en todas sus escalas hasta el infinito (auto similitud). Son curvas lineales y con una dimensión no entera.

B – Teorema de test de estadística circular

Si existe una serie de datos en el círculo con una cantidad limitada de estos datos y valores con una distancia matemática entre lo observado y lo esperado, entonces la probabilidad en el círculo de esta serie de datos es:

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O_1 - \sin E_1}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{\sin O_2 - \sin E_2}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin O_n - \sin E_n}{\sin O_n} \right) \right) / k \quad (1)$$

Demostración

Extremos relativos

Sin $E_i = 0$

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O_1 - 0}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{\sin O_2 - 0}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin O_n - 0}{\sin O_n} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - (1 + 1 + \dots + 1)/k$$

$$P_r = 1 - k/k$$

$$P_r = 0$$

Si la distancia entre lo observado y lo esperado tiende a $\pi/2$, entonces se espera una probabilidad baja y es porque esta distancia es alta

Sin $E_i = 1$

Entonces Sin $O_i = 1$

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{0}{\sin O_1} \right) + \left(\frac{0}{\sin O_2} \right) + \dots + \left(\frac{0}{\sin O_n} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - 0 = 1$$

Si la distancia entre lo observado y lo esperado es mínima o tendiendo a cero, entonces la probabilidad es alta porque los datos están cercanos entre si

Debe tenerse en cuenta que $\sin E_i \geq \sin O_i$ para todo i

$$0 \leq P_r \leq 1$$

$$0 \leq E_i \leq 2\pi$$

$$0 \leq O_i \leq 2\pi$$

$$O_i \neq 0, \pi, 2\pi$$

Corolario 1

El límite de la probabilidad que tiende a $\pi/2$ es 1

$$\lim_{O_i, E_i \rightarrow \pi/2} P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) + \left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin \pi/2 - \sin \pi/2}{\sin \pi/2} \right) \right) / k = 1$$

Entonces se demuestra que para el fractal es concebible el giro de $\pi/2$ hacia su derecha o hacia su izquierda, ya que su probabilidad tiende a la certeza

Corolario 2

Demostrar derivada de datos discretos en fractal con la ayuda de probabilidad de estadística circular

Proponemos un valor constante y sin cambios para E_i

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{1-x}{1} \right) + \left(\frac{1-x}{1} \right) + \dots + \left(\frac{1-x}{1} \right) \right) / k$$

$$P_r = 1 - (k - k.x) / k$$

$$P_r = 1 - (1 - x)$$

$$P_r = x$$

Por lo tanto, no hay variación o cambio con datos constantes, pero si los valores de E_i u O_i son variables podemos esperar una derivada de datos discretos en el fractal cruz.

Corolario 3

Si la probabilidad en forma de test tiene un punto de inflexión, este será

Demostración

O_i es la variable

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{\sin O1 - \sin E1}{\sin O1} \right) + \left(\frac{\sin O2 - \sin E2}{\sin O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin On - \sin En}{\sin On} \right) \right) / k$$

Primera derivada

$$= \left(\left(\frac{\sin E1 \cdot \cos O1}{\sin^2 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \cos O2}{\sin^2 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \cos On}{\sin^2 On} \right) \right) / k$$

Segunda derivada

$$= \left(\left(\frac{\sin E1 \cdot \sin O1}{\sin^4 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \sin O2}{\sin^4 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \sin On}{\sin^4 On} \right) \right) / k$$

Igual a 0

$$0 = \left(\frac{\sin E1 \cdot \sin O1}{\sin^4 O1} \right) + \left(\frac{\sin E2 \cdot \sin O2}{\sin^4 O2} \right) + \dots + \left(\frac{\sin En \cdot \sin On}{\sin^4 On} \right)$$

Una suma de positivos iguales a cero se deduce que cada miembro de la suma es igual a cero, entonces cada numerador es igual a cero.

$$\left(\frac{\sin Ei \cdot \sin Oi}{\sin^4 Oi} \right) = 0$$

$$Oi = \pi/2$$

$$Ei = \pi/2$$

Por lo tanto concluimos que la máxima derivada de datos discretos en un punto de inflexión $\pi/2$, genera una rotación en 90° del eje hacia la derecha o izquierda.

C – Teorema cálculo diferencial decrecimiento exponencial

Si se puede bajar los puntos porcentuales de algún impuesto (caso testigo del IVA), entonces el decrecimiento exponencial a una tasa k en el tiempo t sigue la siguiente ecuación

$$F(t) = f(0) \cdot e^{-(x \cdot j) \cdot t} \quad (2)$$

Demostración

$$\frac{Df(t)}{Dt} = -k \cdot f(t)$$

El decrecimiento exponencial se traduce como la intensidad de decrecimiento de la función o evasión con respecto al tiempo t

Donde k es la tasa de decrecimiento y t es el tiempo

Veamos como bajar la evasión a una tasa k,

$$K = (x \cdot j)$$

Donde x es la tasa de impuestos (IVA caso testigo), anterior al f(t) que es la actual

J son los puntos porcentuales que se deciden bajar del impuesto, siendo este valor deducible de experiencia o simulación con datos históricos.

$$\frac{Df(t)}{f(t)} = -k \cdot dt$$

$$\ln f(t) = -k \cdot t$$

$$F(t) = f(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$F(t) = f(0) \cdot e^{-(x \cdot j) \cdot t}$$

Para graficar tomamos como referencia la tasa de IVA de México de 16%, la hipótesis de baja del impuesto de 4% que será J. Queda f(0) que lo representamos como la situación inicial de decrecimiento que lo consideramos en 1. Entonces queda

$$F(t) = 1 \cdot e^{-(4 \cdot x) \cdot t}$$

$$F(t) = e^{-(4 \cdot x) \cdot t}$$

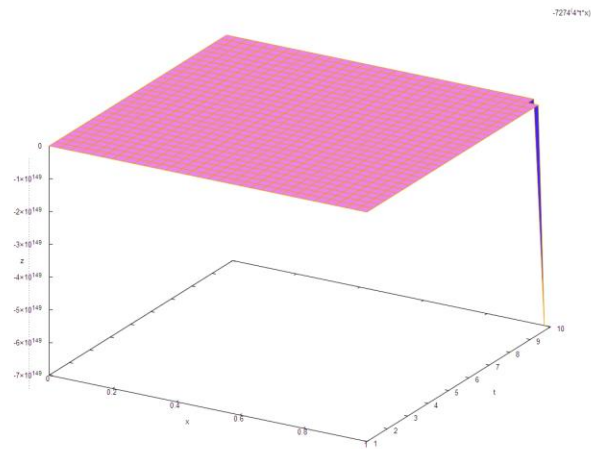


Figura 2 Modelo de decrecimiento exponencial caso de ejemplo

Lema 1

Para el cálculo diferencial, notamos un decrecimiento en el tiempo debido a que nuestra tasa de decrecimiento k se conforma por las variables: x, j; para valores de x entre 0 y 1, también valores de j entre 1 y 100. Notemos que este decrecimiento para valores grandes de k (representado por sus dos variables), genera un menor decrecimiento, entonces el IVA como impuesto estudiado, baja la evasión con estos valores bajos. Se entiende que una reducción de puntos porcentuales genera menor evasión, pero el decrecimiento de la misma necesita de un tiempo de adaptación económica a la nueva tasa en el tiempo t, por lo tanto, la evasión baja más pausadamente. También el tiempo t es motivo de baja pausada y menor a medida que crece, por las mismas razones de acomodamiento de las nuevas variables económicas.

Cabe esperar una menor evasión, y mejor recaudación por la baja de estas variables, sin embargo, los vaivenes de la economía de mercado generan una tasa acorde a las necesidades de la población. Recordemos que la baja impositiva se traduce, además de una suba de recaudación, en

una baja de la tasa inflacionaria y un alivio a los pobres y clase media en el pago del impuesto IVA que es el que estamos estudiando

D – México

Veamos los datos de evasión del impuesto IVA, ISR y IEPS no petrolero por años y como el fractal cruz, en su forma de derivadas de datos discretos, predice futuras evasiones. De datos de que consideran una de las 17 investigaciones hechas por el organismo de impuestos SAT. El estudio se muestra en la tabla 1.

Tabla I

Variación de evasión de impuestos por año en México

Año	Evasión
2004	37,8%
2008	24,3%
2012	26%

El fractal para el primer valor,
 $37,8\% = 141,2^\circ$

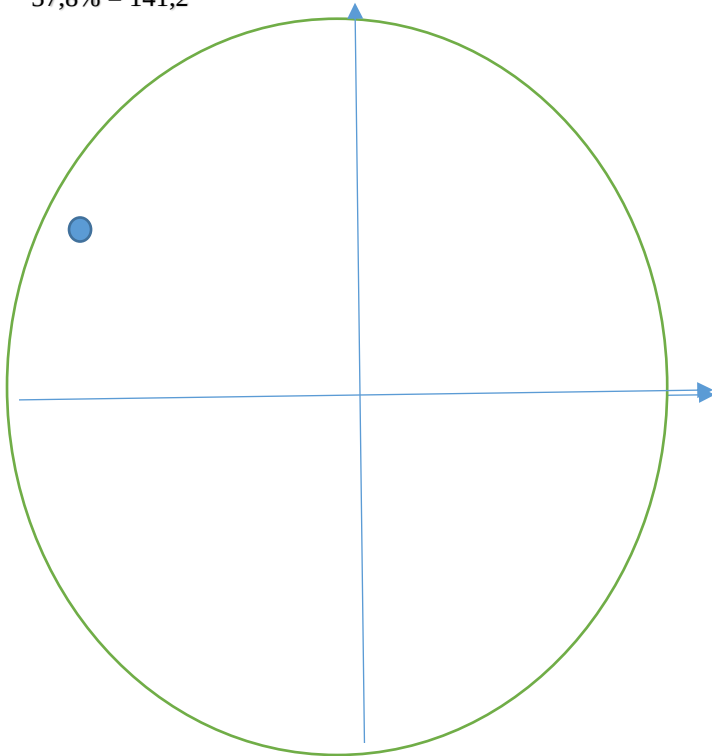


Fig. 3 Primer valor

Para primera derivada de fractal $70,5^\circ$

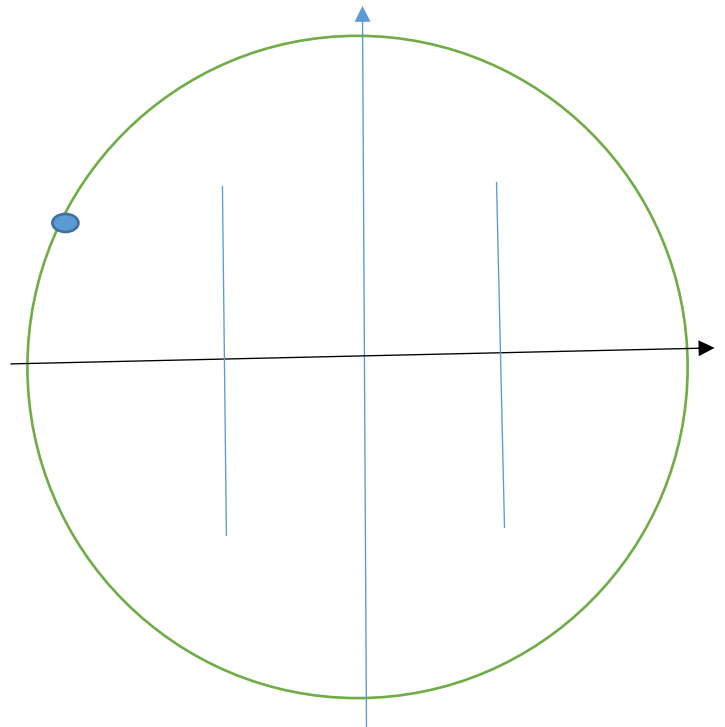


Fig. 4 Primera derivada

Para esta primera derivada el valor que queda es $51,2^\circ$

Segunda derivada: 215°

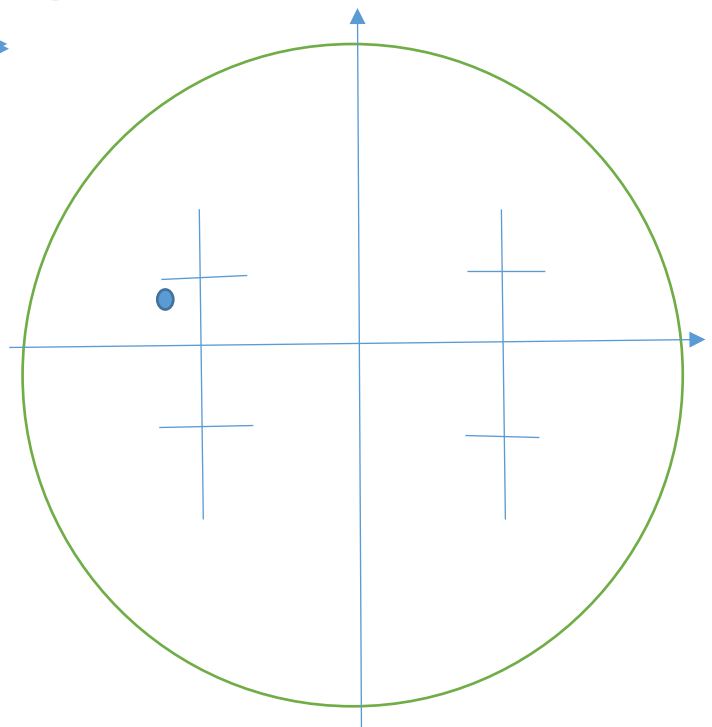


Fig. 5 Segunda derivada

El test de probabilidades me da la siguiente predicción de derivada, tabla I y Ec(1)

$$P_r = 1 - \left(\left(\frac{1 - \sin(141,2^\circ)}{1} \right) + \left(\frac{\sin(70,5^\circ) - \sin(141,2^\circ)}{\sin(70,5^\circ)} \right) + \left(\frac{\sin(215^\circ) + \sin(141,2^\circ)}{\sin(215^\circ)} \right) \right) / 3$$

$$P_r = 0,32215$$

La evasión en el 2012 es del 26% por lo tanto la probabilidad que se deduce de la derivada de datos discretos es 32% siendo el error de cálculo mínimo.
 $26\% \approx 32,215\%$

E – Colombia

A continuación, la variación de evasión de IVA

Tabla II
Variación de evasión IVA en Colombia

Año	Evasión IVA
2015	20,2%
2016	20,5%
2017	22,5%
2018	22,9%
2019	23,3%

El fractal para el primer valor, 20,2% es $80,8^\circ$

Se toman 3 derivadas al haber esa cantidad de datos a partir de 2015 y hasta 2018. Los valores de 2018 y 2019 son casi iguales, por lo tanto, solo se consideran 3 derivadas.

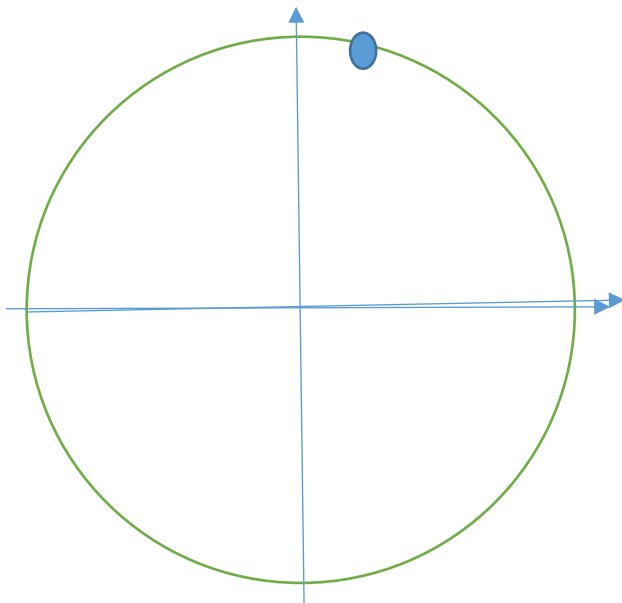


Fig. 6 Primer valor

Primera derivada $40,4^\circ$

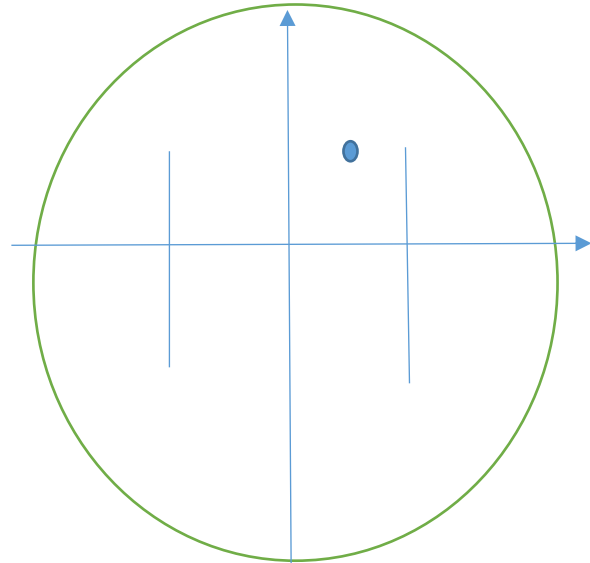


Fig. 7 Fractal primer valor, primera derivada

Segunda derivada $170,4^\circ$

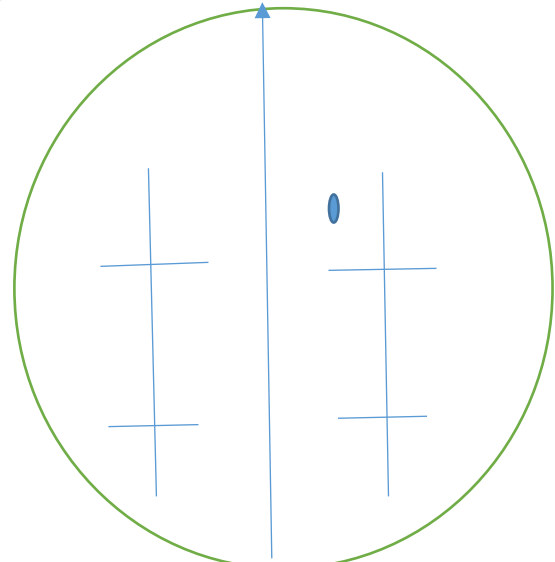
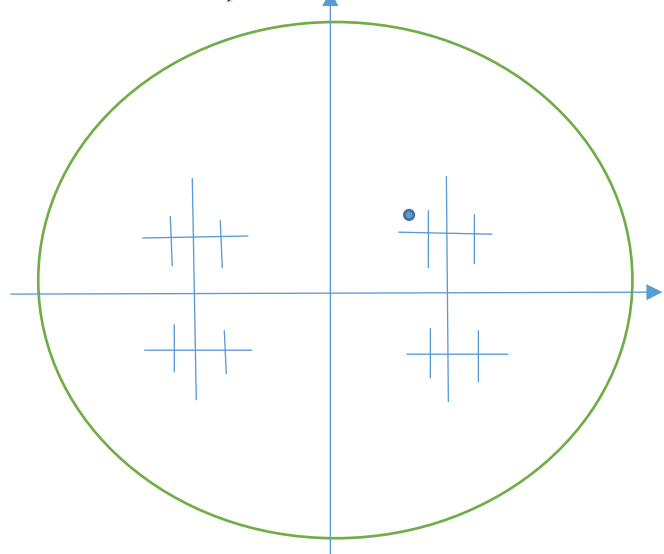


Fig. 8 Fractal segundo valor, segunda derivada

Tercera derivada $80,8^\circ$



El test de probabilidades me da la siguiente predicción de derivada, tabla II y Ec(1)

$$P_r = 1 - \left(\frac{1 - \sin(80,8^\circ)}{1} + \frac{\sin(80,8^\circ) - \sin(40,4^\circ)}{\sin(80,8^\circ)} + \frac{\sin(40,4^\circ) - \sin(170,8^\circ)}{\sin(40,4^\circ)} + \frac{\sin(80,8^\circ) - \sin(170,8^\circ)}{\sin(80,8^\circ)} \right) / 4$$

$$P_r = 0,24586$$

La evasión en el 2018 es del 22,9% por lo tanto la probabilidad que se deduce de la derivada de datos discretos es 24,586% siendo el error de cálculo mínimo.
22,9% $\approx$ 24,586%

A pesar de que el análisis de la variación de evasión no solo puede deberse a una baja de los puntos porcentuales del cobro de impuestos, en tabla 1 se ve una merma de evasión y no precisamente por la reducción de impuestos, será por causas macroeconómicas y políticas de estado, analicemos el impacto que hubiese tenido una rebaja impositiva en el IVA en la evasión. De Ec(2)

$$F(t) = f(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$F(0) = 1$$

F(t) = 0,243 (Para valor evasión en México 2012), tabla I
J = 1 (Rebaja en la simulación de 1 punto porcentual)
T = 4 (los cuatro años entre un dato histórico y el otro)

$$0,243 = e^{-1 \cdot 4 \cdot x}$$

$$\ln 0,243 = -4 \cdot x \cdot \ln e$$

$$\frac{\ln 0,243}{-4} = x$$

$$X = 0,35367$$

El valor de cuatro años anteriores a 2008 (t = 4), es 37,8% tabla I, un valor muy cercano al que se calcula como x.
35,367% $\approx$ 37,6%

La conclusión es que si se hubiera bajado en el lapso 2008-2012 un punto la tasa de impuesto IVA en México, se obtendría la misma reducción de evasión del impuesto de la que se obtuvo por causas macroeconómicas y de políticas de estado en el mismo periodo.

Observemos los mismos análisis para Argentina

Según un estudio la evasión en Argentina es de un 35% anual

$$F(t) = 1 / e^{(4 \cdot 1 \cdot 0,35)}$$

$$F(t) = 0,24659$$

Si bien la hipótesis sugiere una reducción de la evasión notemos que esta baja de una tasa x = 0,35 a un valor de evasión: f(t) = 0,24659. No se podría demostrar de otra manera que, probando en este análisis se considera un tiempo de un año: t=1 y una rebaja de 4 puntos porcentuales del IVA: j=4.

No hay mejor manera de probar las ecuaciones propuestas que llevarlo a la práctica, el déficit fiscal se amortiza con:

- 1- Emisión de moneda
- 2- Pedir dinero al mercado
- 3- Subir los impuestos
- 4- Ajustes en las cuentas públicas

El punto 3, que la mayoría de los economistas y gobiernos practican, lo consideramos de alto costo social. Por eso la alternativa propuesta de bajar puntos porcentuales de los impuestos como el IVA, genera menor evasión y baja de la inflación, especialmente en los sectores de bajos recursos económicos; que más sufren por los impuestos y la inflación.

Conclusiones

Las pruebas empíricas y matemáticas para su definiciones originales y probadas en el trabajo, con importancia en distintas ciencias como de los beneficios económicos y sociales de bajar puntos porcentuales de los impuestos. Sin embargo, hay que ser prudentes y saber que sólo poniendo en práctica lo mismo, se sabrá al final los beneficios que acarrea. La hipótesis de que, bajando puntos de impuestos, y como caso testigo el IVA, se baja la inflación y la evasión, es probable en ambientes donde la economía se encuentre estable. Para situaciones caóticas de las variables, quizás convenga otro análisis macro económico, además de las rebajas impositivas. Usar la derivada de datos discretos en su fractal cruz, que es un punto que se derivan de otro punto, es aconsejable para cualquier situación y usamos para ello; un test de probabilidad en estadísticas circular. Para el decrecimiento de la evasión, se usa un decrecimiento exponencial y cabe acotar, que las variables son las estudiadas sólo para casos impositivos. El IVA es el impuesto a los pobres y clase trabajadora, ya que estos al no poder ahorrar dinero ni invertir en negocios, consumen todas sus ganancias o sueldo. Entonces pagan IVA. Por lo tanto, se beneficia la clase trabajadora y se baja la evasión e inflación.

Agradecimientos

A mi familia y amigos, Rodolfo Calderón, Luis Sacaba, Ing. Gustavo Carrasco, Dr. Ing. Jorge Perera, Ing. Ricardo Adra, Cdr. Rodríguez, Cdr. Arturo López, a mi amigo Marcos Fajardo, a todo el comité JOOM. A todos ellos muchas gracias

REFERENCIAS

- [1] Evasión de IVA e impuesto de renta es 20% del recaudo tributario en Colombia. <https://www.larepublica.co/economia/evasion-de-iva-e-impuesto-de-renta-es-20-del-recaudo-tributario-en-colombia-3211548>. Accedido 15 mayo 2022
- [2] Determinantes del ingreso tributario en México. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-66552019000300177&script=sci_arttext. Accedido 21 mayo 2022
- [3] Walpole, Myers, Myers, Ye; Editorial Octava edición Pearson Prentice Hall. Probabilidad y estadísticas para ingeniería y ciencias.
- [4] Leithold; Editorial Eccga El cálculo con geometría analítica.
- [5] Vicent Martinez, Fernando Ballesteros, Silvestre Paredes; Editorial Guadalmazán. Fractales y caos la aventura de la complejidad.
- [6] Fractales_lineales. <https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodper/v/fractales/fractales-lineales/>. Accedido 6 de junio 2022
- [7] Benoit Mandelbrot, Editorial Círculo de Lectores. Los objetos fractales: Forma, Azar y Dimensión.
- [8] Douglas C. Montgomery, George C. Runger. Editorial Limusa. Probabilidad y Estadística aplicada a la ingeniería
- [9] Ron Larson. Editorial Cengage Learning. Cálculo tomo 1.
- [10] T. M. Apostol. Editorial Reverte. Calculus: cálculo con funciones de una variable con una introducción al Álgebra Lineal Vol. 1

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*